調和トラップ中の1次元ボース系の理論（Ⅳ）

大 矢 正 人*

Theory of One-Dimensional Bosons in Harmonic Traps（Ⅳ）

OHYA Masato

We consider a one-dimensional two-level system of repulsive δ-interacting bosons trapped in a harmonic potential. For all values of the coupling strength, we derive expressions of the wave functions of three, four, five, six-body systems.

第1章 序　　論

準1次元 Bose-Einstein 凝縮体（BEC）の最近の実験[1)2)3)]は1次元ボース系の理論的研究を活性化させている。BEC の形状はトラップポテンシャルの形状を反映しており，調和トラップ周波数 ω_Z を他の周波数 ω_L より非常に小さくすると，準1次元 BEC が実現される。ボース系のふるまいはトラップポテンシャル中の二体デルタ関数型相互作用をするボース粒子の多体シュレディンガー方程式に支配されるが，一般的にこの方程式の厳密解を得ることは非常にむつかしく，通常は近似解が論じられる。高密度で弱い斥力相互作用の場合，BEC は平均場理論[4)]である Gross-Pitaevskii 方程式によって比較的によく性質が説明される。一方，希薄で強い斥力相互作用の場合，粒子間の反撥によってフェルミ粒子のようにふるまい，平均場理論は使えず，この状態は Tonks-Girardeau（TG）気体と呼ばれている。最近の実験[5)6)]は粒子間の相互作用の強さを変えることによって平均場 BEC 領域から TG 領域への転移を観測した。

1次元ボース系の理論的研究として，Girardeau[7)]は均質1次元剛体球点ボース系の基底状態の波動関数 Ψ_0^B と自由フェルミ気体の基底状態の波動関数の間には $\Psi_0^B = |\Psi_0^F|$ の関係があることを示した。Tonks[8)]は古典的1次元剛体球気体の状態方程式を導いた。その名をとり，剛体点球からなる1次元ボース気体は Tonks-Girardeau（TG）気体と呼ばれる。Lieb-Liniger[9)]は二体相互作用が斥力デルタ関数型の均質1次元ボース系を考え，相互作用が有限の場合の基底状態の厳密解を求めた。弱い相互作用の場合は Bogoliubov の摂動理論[10)]と一致し，強い相互作用の場合は TG 気体の結果と一致することを示した。

1次元ボース系の有限系の理論として，Forrester ら[11)]は剛体球ボース気体の場合，リングトラップと調和トラップ中での基底状態の波動関数から1体密度行列の固有値と固有関数を粒子数 N ＝2～30と N が大きい極限に対して求めた。Lieb-Liniger は二体デルタ相互作用が斥力の場合，N ＝2と N が非常に大きい熱力学極限での基底状態のエネルギーを求めた。Muga-Snider[12)]は二体デルタ関数型相互作用が引力の場合，リングトラップ中の3粒子ボース系を解析し，強い引力相互作用のとき二量体や三量体を形成することを示した。

* 工学部電気電子工学科　教授
2008年9月29日受付

Sakmann ら[13]は，リングトラップの場合，Lieb-Liniger が導いた N 粒子基底状態の厳密解を導く結合超越方程式を数値的に解いて，$N=50$までの有限系の性質を調べた。斥力相互作用の場合，Lieb-Liniger の熱力学極限解と TG 気体極限解と比較した。Lieb-Liniger の熱力学極限解のエネルギーと弱い相互作用の場合の有限系のエネルギーは異なり，有限系のエネルギーが TG 気体極限解のエネルギーに近づくためには，粒子数が大きいほどより強い相互作用が必要となることが分かった。引力相互作用の場合，有限系の基底状態のエネルギーは平均場理論で決まる臨界相互作用強さ以上になるとき，無限長さの場合のエネルギーに近づくことが分かった。

本論文を含む一連の研究[14)15)16)]は Lieb-Liniger 理論の均質1次元ボース系の理論を調和トラップポテンシャル中の1次元トラップボース系に適用したものである。第Ⅰ論文[14)]では粒子数 $N=2$，3，4の場合，第Ⅱ論文[15)]では $N=5$ の場合で相互作用が有限のときの基底状態を求め，第Ⅲ論文[16)]では一般の N 粒子の場合の弱い相互作用と強い相互作用の極限での結果を導いた。本論文は2準位ボース系を考え，粒子数 $N=3$，4，5，6の場合の基底状態を求める。第2章では1次元2準位ボース系の理論を展開し，第3章では $N=3$，4の基底状態の波動関数を求め，その結果を使って波動関数を導出する新しい方法を示す。第4章ではその方法を $N=5$，6の場合に適用する。第5章では本論文の結果をまとめ，今後の課題を示す。

第2章　1次元2準位ボース系

本章では，ボース粒子の粒子間相互作用が斥力デルタ関数型であり，閉じ込めポテンシャルが調和振動子型ポテンシャルである場合の1次元2準位ボース系の理論を展開する。N 体のボース系のハミルトニアンは次式である。

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\omega^2x_i^2$$
$$+g_{1D}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\delta(x_i-x_j), \tag{2.1}$$

ここで m は原子質量，$g_{1D}(>0)$ は相互作用の強さである。粒子間相互作用が存在しない場合は N 個の1次元調和振動子系となり，この場合の1粒子ハミルトニアンは

$$\hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{2.2}$$

である。2準位ボース系の場合，シュレディンガー方程式

$$\hat{H}_0\Psi=E\Psi \tag{2.3}$$

より，波動関数とエネルギー固有値は

$$\Psi_0=C_0e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}H_0(\alpha x),E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega, \tag{2.4}$$

$$\Psi_1=C_1e^{-\frac{1}{2}(\alpha x)^2}H_1(\alpha x),E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega \tag{2.5}$$

となり，$H_n\ (n=0,1)$ は Hermite 多項式，係数 C_n $(n=0,1)$ は

$$H_0(\alpha x)=1,\quad H_1(\alpha x)=2\alpha x, \tag{2.6}$$

$$C_0=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}},\quad C_1=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.7}$$

$$\alpha=\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

である。ここで $\hbar=1$，$2m=1$，$g_{1D}=2c$ とおくと，ハミルトニアンは

$$\hat{H}=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\alpha^4\sum_{i=1}^{N}x_i^2+2c\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\delta(x_i-x_j) \tag{2.9}$$

となる。波動関数 $\Psi(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{N-1},x_N)$ は $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{N-1}<x_N$ に対して

$$\Psi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{N-1},\ x_N)$$
$$=e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\alpha x_i)^2}\sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2}\sum_{k_3=1}^{2}\cdots\sum_{k_{N-1}=1}^{2}\sum_{k_N=1}^{2}$$
$$\times A(k_1,k_2,k_3,\cdots,k_{N-1},k_N)C_{k_1-1}C_{k_2-1}C_{k_3-1}\cdots$$
$$C_{k_{N-1}-1}C_{k_N-1}\times H_{k_1-1}(\alpha x_1)H_{k_2-1}(\alpha x_2)H_{k_3-1}(\alpha x_3)\cdots$$
$$H_{k_{N-1}-1}(\alpha x_{N-1})H_{k_N-1}(\alpha x_N) \tag{2.10}$$

と仮定する。$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_N<x_{N-1}$に対する波動関数は（2.10）の右辺で$x_{N-1}$と$x_N$を交換したものである。シュレディンガー方程式(2.3)より波動関数（2.10）に対する境界条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}-\frac{\partial}{\partial x_N}\right)\Psi\Big|_{x_{N-1}=x_N+0}-\left(\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}-\frac{\partial}{\partial x_N}\right)\Psi\Big|_{x_{N-1}=x_N-0}=2c\Psi|_{x_{N-1}=x_N} \quad (2.11)$$

となる。同様な方法で次の（$N-2$）個の境界条件が求まる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{N-2}}-\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}\right)\Psi\Big|_{x_{N-2}=x_{N-1}+0}-\left(\frac{\partial}{\partial x_{N-2}}-\frac{\partial}{\partial x_{N-1}}\right)\Psi\Big|_{x_{N-2}=x_{N-1}-0}=2c\Psi|_{x_{N-2}=x_{N-1}}, \quad (2.12)$$

………

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\Psi\Big|_{x_2=x_3+0}-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\Psi\Big|_{x_2=x_3-0}=2c\,\Psi|_{x_2=x_3}, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Psi\Big|_{x_1=x_2+0}-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Psi\Big|_{x_1=x_2-0}=2c\,\Psi|_{x_1=x_2}. \quad (2.14)$$

(2.11)を使って計算すると，$H_{k_1-1}(\alpha x_1)H_{k_2-1}(\alpha x_2)\cdots\cdots H_{k_{N-3}-1}(\alpha x_{N-3})H_{k_{N-2}-1}(\alpha x_{N-2})$の係数は次式となる。

$$\sum_{k_{N-1}=1}^{2}\sum_{k_N=1}^{2}\{A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-2},k_{N-1},k_N)-A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-2},k_N,k_{N-1})\}C_{k_{N-1}-1}C_{k_N-1}$$
$$\times\{2\alpha(k_N-1)H_{k_{N-1}-1}(\alpha x_N)H_{k_N-2}(\alpha x_N)-2\alpha(k_{N-1}-1)H_{k_{N-1}-2}(\alpha x_N)H_{k_N-1}(\alpha x_N)\}$$
$$=c\sum_{k_{N-1}=1}^{2}\sum_{k_N=1}^{2}\{A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-2},k_{N-1},k_N)+A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-2},k_N,k_{N-1})\}C_{k_{N-1}-1}C_{k_N-1}$$
$$\times H_{k_{N-1}-1}(\alpha x_N)H_{k_N-1}(\alpha x_N). \quad (2.15)$$

$H_0(\alpha x_N)H_0(\alpha x_N)$の係数を比較すると，次の関係式が導かれる。

$$A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-2},2,1)=A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-2},1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-2},1,1), \quad (2.16)$$

ここで $k_1,k_2,\cdots,k_{N-3},k_{N-2}=1,2$である。

同様に境界条件（2.12）の場合，

$$A(k_1,k_2,\cdots,2,1,k_N)=A(k_1,k_2,\cdots,1,2,k_N)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(k_1,k_2,\cdots,1,1,k_N) \quad (2.17)$$

$(k_1,k_2,\cdots,k_{N-3},k_N=1,2)$，

境界条件（2.13）の場合，

$$A(k_1,2,1,\cdots,k_{N-1},k_N)=A(k_1,1,2,\cdots,k_{N-1},k_N)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(k_1,1,1,\cdots,k_{N-1},k_N) \quad (2.18)$$

$(k_1,k_4,\cdots,k_{N-1},k_N=1,2)$，

境界条件（2.14）の場合，

$$A(2,1,k_3,\cdots,k_{N-1},k_N)=A(1,2,k_3,\cdots,k_{N-1},k_N)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,k_3,\cdots,k_{N-1},k_N) \quad (2.19)$$

$(k_3,k_4,\cdots,k_{N-1},k_N=1,2)$

の関係式が導かれる。

２準位系の場合，状態iになる粒子数を$n_i(i=1,2)$とし，その場合の確率振幅を$C(n_1,n_2)$としたとき，$C(n_1,n_2)$と係数$A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)$の間には規格化条件より，次の関係が成立しなければならない。

$$|C(n_1,n_2)|^2=\Sigma\,|A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)|^2, \quad (2.20)$$

ただし，$n_1+n_2=N$ である。具体的には

$$|C(N,0)|^2=|A(1,1,\cdots,1,1)|^2, \quad (2.21)$$

$$|C(N-1,1)|^2=|A(1,1,\cdots,1,2)|^2+|A(1,1,\cdots,2,1)|^2+\cdots\cdots+|A(1,2,\cdots,1,1)|^2+|A(2,1,\cdots,1,1)|^2, \quad (2.22)$$

………

$$|C(1,N-1)|^2=|A(1,2,\cdots,2,2)|^2+|A(2,1,\cdots,2,2)|^2+\cdots\cdots$$

$+|A(2,2,\cdots,1,2)|^2+|A(2,2,\cdots,2,1)|^2,$ (2.23)

$|C(0,N)|^2$
$=|A(2,2,\cdots,2,2)|^2$ (2.24)

である。第Ⅲ論文[16]で指摘したように，$A(1,1,\cdots,1,1)$を除き，同じ$C(n_1,n_2)$に属する係数$A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)$の総和は0である。

$A(1,1,\cdots,1,2)+A(1,1,\cdots,2,1)$
$+\cdots\cdots\cdots$
$+A(1,2,\cdots,1,1)+A(2,1,\cdots,1,1)=0,$ (2.25)

$\cdots\cdots\cdots$

$A(1,2,\cdots,2,2)+A(2,1,\cdots,2,2)$
$+\cdots\cdots\cdots$
$+A(2,2,\cdots,1,2)+A(2,2,\cdots,2,1)=0,$ (2.26)

$A(2,2,\cdots,2,2)=0$ (2.27)

となる。さらに$C(n_1,n_2)$に対応する波動関数が$x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N$に関して偶関数の場合は

$A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)=A(k_N,k_{N-1},\cdots,k_2,k_1)$ (2.28)

の関係を満たし，奇関数の場合は

$A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)=-A(k_N,k_{N-1},\cdots,k_2,k_1)$ (2.29)

の関数を満たしている。

2準位系の場合，$C(N-1,1)$に対応する係数$A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)$は第Ⅲ論文[16]の方法で求めることができる。その結果は以下である。

(2.16) より$k_1=k_2=\cdots=k_N=1$のとき，

$A(1,1,\cdots,1,2,1)$
$=A(1,1,\cdots,1,1,2)$
$-\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,\cdots,1,1,1),$ (2.30)

(2.17) より$k_1=k_2=\cdots=k_N=1$のとき，

$A(1,1,\cdots,2,1,1)$
$=A(1,1,\cdots,1,2,1)$
$-\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,\cdots,1,1,1),$ (2.31)

(2.18) より$k_1=k_4=\cdots=k_{N-1}=k_N=1$のとき，

$A(1,2,1,\cdots,1,1)$
$=A(1,1,2,\cdots,1,1)$
$-\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,\cdots,1,1),$ (2.32)

(2.19) より$k_3=k_4=\cdots=k_{N-1}=k_N=1$のとき，

$A(2,1,1,\cdots,1,1)$
$=A(1,2,1,\cdots,1,1)$
$-\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,\cdots,1,1)$ (2.33)

であり，以上の結果を使うと

$A(2,1,1,\cdots,1,1)$
$=A(1,1,1,\cdots,1,2)$
$-(N-1)\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,\cdots,1,1)$ (2.34)

となる。一般的には

$A(\overbrace{1,\cdots\cdots,1}^{k-1},2,\overbrace{1,\cdots\cdots,1}^{N-k})$
$=A(1,1,1,\cdots,1,1,2)$
$-(N-k)\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,\cdots,1,1,1)$ (2.35)

となる。(2.25) に$k=1,2,\cdots,N-1,N$の場合の(2.35) を代入すると

$NA(1,1,1,\cdots,1,1,2)$
$=\{1+2+\cdots+(N-2)+(N-1)\}$
$\times\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,\cdots,1,1,1)$ (2.36)

となり，

$A(1,1,1,\cdots,1,1,2)$
$=\dfrac{N-1}{2}\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,\cdots,1,1,1)$ (2.37)

である。(2.37) を (2.35) へ代入すると

$A(\overbrace{1,\cdots\cdots,1}^{k-1},2,\overbrace{1,\cdots\cdots,1}^{N-k})$
$=\left(k-\dfrac{N+1}{2}\right)\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,\cdots,1,1,1)$ (2.38)

となる。ここで$k=1,2,\cdots,N-1,N$である。

$N=3$の場合，$k=3$のとき，

$A(1,1,2)=1\cdot\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1),$ (2.39)

$k=2$のとき，

$A(1,2,1)=0\cdot\dfrac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\dfrac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1),$ (2.40)

$k=1$のとき，

$$A(2,1,1)=(-1)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1) \tag{2.41}$$

となる。$N=4$ の場合，$k=4$ のとき，

$$A(1,1,1,2)=\frac{3}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1), \tag{2.42}$$

$k=3$ のとき，

$$A(1,1,2,1)=\frac{1}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1), \tag{2.43}$$

$k=2$ のとき，

$$A(1,2,1,1)=\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1), \tag{2.44}$$

$k=1$ のとき，

$$A(2,1,1,1)=\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \tag{2.45}$$

となる。$N=5$ の場合，$k=5$ のとき，

$$A(1,1,1,1,2)=2\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1), \tag{2.46}$$

$k=4$ のとき，

$$A(1,1,1,2,1)=1\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1), \tag{2.47}$$

$k=3$ のとき，

$$A(1,1,2,1,1)=0\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1), \tag{2.48}$$

$k=2$ のとき，

$$A(1,2,1,1,1)=(-1)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1), \tag{2.49}$$

$k=1$ のとき，

$$A(2,1,1,1,1)=(-2)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1) \tag{2.50}$$

となる。$N=6$ の場合，$k=6$ のとき，

$$A(1,1,1,1,1,2)=\frac{5}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1,1), \tag{2.51}$$

$k=5$ のとき，

$$A(1,1,1,1,2,1)=\frac{3}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1,1), \tag{2.52}$$

$k=4$ のとき，

$$A(1,1,1,2,1,1)=\frac{1}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1,1), \tag{2.53}$$

$k=3$ のとき，

$$A(1,1,2,1,1,1)=\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1,1), \tag{2.54}$$

$k=2$ のとき，

$$A(1,2,1,1,1,1)=\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1,1), \tag{2.55}$$

$k=1$ のとき，

$$A(2,1,1,1,1,1)=\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1,1,1) \tag{2.56}$$

となる。

第3章　$N=3$，4の場合

本章では，1次元2準位ボース系の $N=3$，4の場合の $A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)$ を求めるとともに，その結果より $A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)$ を導出するための新しい方法を導く。

$N=3$ の場合，(2.16) より

$$A(k_1,2,1)=A(k_1,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(k_1,1,1), \tag{3.1}$$

$(k_1=1,2)$

(2.19) より

$$A(2,1,k_3)=A(1,2,k_3)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,k_3) \tag{3.2}$$

$(k_3=1,2)$

である。(3.1) より $k_1=1$，2のときそれぞれ

$$A(1,2,1)=A(1,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1), \tag{3.3}$$

$$A(2,2,1)=A(2,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(2,1,1) \tag{3.4}$$

であり，(3.2)より $k_3=1$，2のときそれぞれ

$$A(2,1,1)=A(1,2,1)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1), \tag{3.5}$$

$$A(2,1,2)=A(1,2,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,2) \tag{3.6}$$

である。(2.25) (2.26) (2.27) よりそれぞれ

$$A(1,1,2)+A(1,2,1)+A(2,1,1)=0, \tag{3.7}$$

$$A(1,2,2)+A(2,1,2)+A(2,2,1)=0, \tag{3.8}$$

$$A(2,2,2)=0 \tag{3.9}$$

である。(3.3) を (3.5) へ代入すると

$$A(2,1,1)=A(1,1,2)-2\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1) \tag{3.10}$$

となり，(3.3)と(3.10)を(3.7)へ代入すると

$$A(1,1,2)=\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1) \tag{3.11}$$

となり，(3.3) と (3.10) より

$$A(1,2,1)=0, \tag{3.12}$$

$$A(2,1,1)=-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1) \tag{3.13}$$

である。(3.4) に (3.13) を代入すると

$$A(2,2,1)=A(2,1,2)+\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1) \tag{3.14}$$

となり，(3.6) に (3.11) を代入すると

$$A(2,1,2)=A(1,2,2)-\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1) \tag{3.15}$$

である。(3.15) を (3.14) へ代入すると

$$A(2,2,1)=A(1,2,2) \tag{3.16}$$

となり，(3.15)と(3.16)を(3.8)へ代入すると

$$A(1,2,2)=\frac{1}{3}\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1) \tag{3.17}$$

となる。(3.17) を (3.15) と (3.16) へ代入するとそれぞれ

$$A(2,1,2)=-\frac{2}{3}\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1), \tag{3.18}$$

$$A(2,2,1)=\frac{1}{3}\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1) \tag{3.19}$$

である。

$N=4$ の場合，(2.16) ～ (2.19) より

$$A(k_1,k_2,2,1)=A(k_1,k_2,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(k_1,k_2,1,1), \tag{3.20}$$

$(k_1,k_2=1,2)$

$$A(k_1,2,1,k_4)=A(k_1,1,2,k_4)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(k_1,1,1,k_4), \tag{3.21}$$

$(k_1,k_4=1,2)$

$$A(2,1,k_3,k_4)=A(1,2,k_3,k_4)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,k_3,k_4) \tag{3.22}$$

$(k_3,k_4=1,2)$

である。(3.20) より $k_1=k_2=1$ の場合，

$$A(1,1,2,1)=A(1,1,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \tag{3.23}$$

となり，(3.21) より $k_1=k_4=1$ の場合，

$$A(1,2,1,1)=A(1,1,2,1)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \tag{3.24}$$

となり，(3.22) より $k_3=k_4=1$ の場合，

$$A(2,1,1,1)=A(1,2,1,1)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \tag{3.25}$$

となる。(3.23) を (3.24) へ代入すると

$$A(1,2,1,1)=A(1,1,1,2)-2\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \tag{3.26}$$

となり，(3.26) を (3.25) へ代入すると

$A(2,1,1,1)$

$$=A(1,1,1,2)-3\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \quad (3.27)$$

となる。(2.25) ～ (2.27) より

$$A(1,1,1,2)+A(1,1,2,1)+A(1,2,1,1)$$
$$+A(2,1,1,1)=0, \quad (3.28)$$
$$A(1,1,2,2)+A(1,2,1,2)+A(1,2,2,1)$$
$$+A(2,1,1,2)+A(2,1,2,1)+A(2,2,1,1)=0, \quad (3.29)$$
$$A(1,2,2,2)+A(2,1,2,2)+A(2,2,1,2)$$
$$+A(2,2,2,1)=0, \quad (3.30)$$
$$A(2,2,2,2)=0 \quad (3.31)$$

となる。(3.23), (3.26), (3.27) を (3.28) へ代入すると

$$A(1,1,1,2)$$
$$=\frac{1+2+3}{4}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1)$$
$$=\frac{3}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \quad (3.32)$$

となる。この結果を (3.23) (3.26) (3.27) へ代入するとそれぞれ

$$A(1,1,2,1)=\frac{1}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1), \quad (3.33)$$
$$A(1,2,1,1)=-\frac{1}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1), \quad (3.34)$$
$$A(2,1,1,1)=-\frac{3}{2}\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1) \quad (3.35)$$

となる。(3.20) の $k_1=1$, $k_2=2$ と $k_1=2$, $k_2=1$ の場合,

$$A(1,2,2,1)$$
$$=A(1,2,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,2,1,1), \quad (3.36)$$
$$A(2,1,2,1)$$
$$=A(2,1,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(2,1,1,1) \quad (3.37)$$

となる。(3.21) の $k_1=1$, $k_4=2$ と $k_1=2$, $k_4=1$ の場合,

$$A(1,2,1,2)$$
$$=A(1,1,2,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,2), \quad (3.38)$$
$$A(2,2,1,1)$$
$$=A(2,1,2,1)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(2,1,1,1) \quad (3.39)$$

となる。(3.22) の $k_3=1$, $k_4=2$ と $k_3=2$, $k_4=1$ の場合,

$$A(2,1,1,2)$$
$$=A(1,2,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,2), \quad (3.40)$$
$$A(2,1,2,1)$$
$$=A(1,2,2,1)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,2,1) \quad (3.41)$$

となる。(3.36) に (3.38) を代入すると

$$A(1,2,2,1)$$
$$=A(1,1,2,2)$$
$$-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)(A(1,1,1,2)+A(1,2,1,1)), \quad (3.42)$$

(3.41) へ (3.42) を代入すると

$$A(2,1,2,1)$$
$$=A(1,1,2,2)$$
$$-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)(A(1,1,1,2)+A(1,2,1,1)$$
$$+A(1,1,2,1)), \quad (3.43)$$

(3.39) へ (3.43) を代入すると

$$A(2,2,1,1)$$
$$=A(1,1,2,2)$$
$$-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)(A(1,1,1,2)+A(1,2,1,1)$$
$$+A(1,1,2,1)+A(2,1,1,1)), \quad (3.44)$$

(3.37) へ (3.43) を代入すると

$$A(2,1,1,2)$$
$$=A(2,1,2,1)+\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(2,1,1,1)$$
$$=A(1,1,2,2)$$
$$-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)(A(1,1,1,2)+A(1,2,1,1)$$
$$+A(1,1,2,1)-A(2,1,1,1)), \quad (3.45)$$

(3.40) へ (3.38) を代入すると

$$A(2,1,1,2)$$
$$=A(1,1,2,2)-2\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,2) \quad (3.46)$$

となる。(3.32), (3.33), (3.34), (3.35) の結果

を(3.38), (3.42), (3.43), (3.44), (3.45), (3.46)へ代入すると

$$A(1,2,1,2)=A(1,1,2,2)-\frac{3}{2}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1), \quad (3.47)$$

$$A(1,2,2,1)=A(1,1,2,2)-\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,1,1), \quad (3.48)$$

$$A(2,1,2,1)=A(1,1,2,2)-\frac{3}{2}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1), \quad (3.49)$$

$$A(2,2,1,1)=A(1,1,2,2), \quad (3.50)$$

$$A(2,1,1,2)=A(1,1,2,2)-3\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1), \quad (3.51)$$

$$A(2,1,1,2)=A(1,1,2,2)-3\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1) \quad (3.52)$$

となる。(3.47)～(3.52)を(3.29)へ代入すると

$$A(1,1,2,2)=\frac{7}{6}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1) \quad (3.53)$$

であり，この結果を(3.47)～(3.52)へ代入すると

$$A(1,2,1,2)=-\frac{1}{3}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1), \quad (3.54)$$

$$A(1,2,2,1)=\frac{1}{6}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1), \quad (3.55)$$

$$A(2,1,2,1)=-\frac{1}{3}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1), \quad (3.56)$$

$$A(2,2,1,1)=\frac{7}{6}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1), \quad (3.57)$$

$$A(2,1,1,2)=-\frac{11}{6}\left(\frac{C_0C_0}{C_0C_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^2A(1,1,1,1) \quad (3.58)$$

である。(3.20) より $k_1=k_2=2$ の場合，

$$A(2,2,2,1)=A(2,2,1,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(2,2,1,1) \quad (3.59)$$

となり，(3.21) より $k_1=k_4=2$ の場合，

$$A(2,2,1,2)=A(2,1,2,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(2,1,1,2) \quad (3.60)$$

となり，(3.22) より $k_3=k_4=2$ の場合，

$$A(2,1,2,2)=A(1,2,2,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A(1,1,2,2) \quad (3.61)$$

となる。(3.61) を (3.60) へ代入すると

$$A(2,2,1,2)=A(1,2,2,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)(A(1,1,2,2)+A(2,1,1,2)) \quad (3.62)$$

となり，(3.62) を (3.59) へ代入すると

$$A(2,2,2,1)=A(1,2,2,2)-\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)(A(1,1,2,2)+A(2,1,1,2)+A(2,2,1,1)) \quad (3.63)$$

となる。(3.61), (3.62), (3.63) を (3.30) へ代入し，(3.53) ～ (3.58) の結果を使うと，

$$A(1,2,2,2)=\frac{1}{4}\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^3\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^3A(1,1,1,1) \quad (3.64)$$

であり，(3.61), (3.62), (3.63)へ代入し，(3.53) ～ (3.58) の結果を使うと，

$$A(2,1,2,2)=-\frac{11}{12}\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^3\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^3A(1,1,1,1), \quad (3.65)$$

$$A(2,2,1,2)=\frac{11}{12}\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^3\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^3A(1,1,1,1), \quad (3.66)$$

$$A(2,2,2,1)=-\frac{1}{4}\left(\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\right)^3\left(\frac{c}{2\alpha}\right)^3A(1,1,1,1) \tag{3.67}$$

となる。

次に以上の係数 $A(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)$ の結果より係数間の関係を構造化し，係数を導出するための新しい方法を導く。$N=3$ の場合 $A(k_1,k_2,k_3)$ は次のツリー構造をしていると考える。

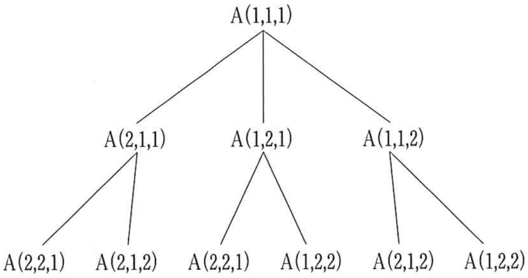


図1　$N=3$ の場合

第1段は $A(1,1,1)$，第2段は $A(2,1,1)$，$A(1,2,1)$，$A(1,1,2)$，第3段は $A(2,2,1)$，$A(2,1,2)$，$A(1,2,2)$ からなる。第2段は第1段から3個の1のうち1個だけ $1\to2$ に変換したものであり，第3段は第2段から2個の1のうち1個だけ $1\to2$ に変換したものである。第1段と第2段の関係を次式で表わす。

$$\begin{aligned}&A(1,1,2)=x(0,1)BA(1,1,1),\\&A(1,2,1)=x(0,2)BA(1,1,1),\\&A(2,1,1)=x(0,3)BA(1,1,1),\end{aligned} \tag{3.68}$$

ここで

$$B=\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right) \tag{3.69}$$

である。(3.11)，(3.12)，(3.13) より

$$x(0,1)=1,\ \ x(0,2)=0,\ \ x(0,3)=-1 \tag{3.70}$$

であり，

$$\begin{aligned}&x(0,2)=x(0,1)-1,\\&x(0,3)=x(0,2)-1\end{aligned} \tag{3.71}$$

の関係があることが分かる。次に第2段と第3段の関係を次式で表わす。

$$\begin{aligned}A(1,2,2)&=x(1,1)BA(1,1,2)\\&=x(1,1)x(0,1)B^2A(1,1,1),\\A(2,1,2)&=x(1,2)BA(1,1,2)\\&=x(1,2)x(0,1)B^2A(1,1,1),\\A(1,2,2)&=x(1,3)BA(1,2,1)\\&=x(1,3)x(0,2)B^2A(1,1,1),\\A(2,2,1)&=x(1,4)BA(1,2,1)\\&=x(1,4)x(0,2)B^2A(1,1,1),\\A(2,1,2)&=x(1,5)BA(2,1,1)\\&=x(1,5)x(0,3)B^2A(1,1,1),\\A(2,2,1)&=x(1,6)BA(2,1,1)\\&=x(1,6)x(0,3)B^2A(1,1,1).\end{aligned} \tag{3.72}$$

(3.17)，(3.18)，(3.19) より

$$\begin{aligned}&x(1,1)x(0,1)=\frac{1}{3},\\&x(1,2)x(0,1)=x(1,5)x(0,3)=-\frac{2}{3},\\&x(1,6)x(0,3)=\frac{1}{3}\end{aligned} \tag{3.73}$$

となり，(3.70) より

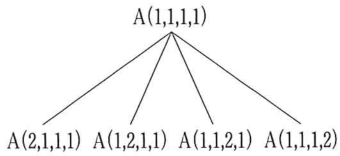
$$\begin{aligned}&x(1,1)=\frac{1}{3},x(1,2)=-\frac{3}{2},\\&x(1,5)=\frac{2}{3},x(1,6)=-\frac{1}{3}\end{aligned} \tag{3.74}$$

となる。ここで $x(0,2)=0$ より $x(1,3)$ と $x(1,4)$ は考えない。この場合も (3.71) と同様に

$$\begin{aligned}&x(1,2)=x(1,1)-1,\\&x(1,6)=x(1,5)-1\end{aligned} \tag{3.75}$$

の関係があることが分かる。

$N=4$ の場合 $A(k_1,k_2,k_3,k_4)$ は次のツリー構造をしていると考える。



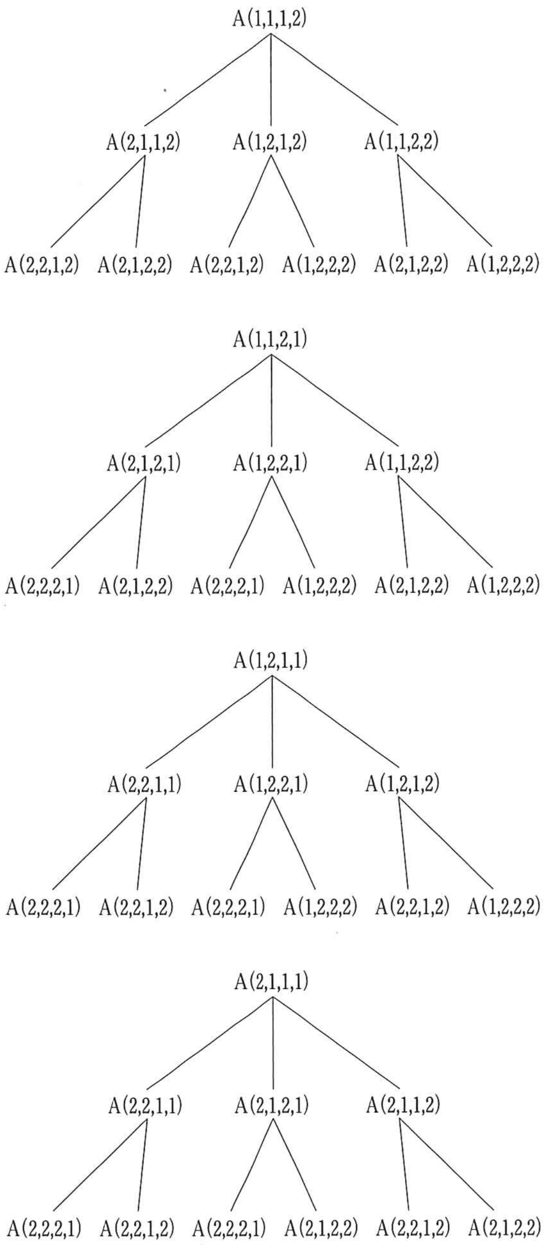


図2　$N=4$ の場合

第1段は $A(1,1,1,1)$，第2段は $A(2,1,1,1)$，$A(1,2,1,1)$，$A(1,1,2,1)$，$A(1,1,1,2)$，第3段は $A(2,2,1,1)$，$A(2,1,2,1)$，$A(2,1,1,2)$，$A(1,2,1,2)$，$A(1,2,2,1)$，$A(1,1,2,2)$，第4段は $A(2,2,2,1)$，$A(2,1,2,2)$，$A(2,2,1,2)$，$A(2,2,2,1)$からなる。第2段は第1段から4個の1のうち1個だけ $1\to2$ に変換したものであり，第3段は第2段から3個の1のうち1個だけ $1\to2$ に変換したものであり，第4段は第3段から2個の1のうち1個だけ $1\to2$ に変換したものである。第1段と第2段の関係を次式で表わす。

$$
\begin{aligned}
&A(1,1,1,2)=x(0,1)BA(1,1,1,1),\\
&A(1,1,2,1)=x(0,2)BA(1,1,1,1),\\
&A(1,2,1,1)=x(0,3)BA(1,1,1,1),\\
&A(2,1,1,1)=x(0,4)BA(1,1,1,1),
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

(3.32)，(3.33)，(3.34)，(3.35) より

$$
x(0,1)=\frac{3}{2},\ x(0,2)=\frac{1}{2},\quad x(0,3)=-\frac{1}{2},\ x(0,4)=-\frac{3}{2}
\tag{3.77}
$$

となる。この場合

$$
\begin{aligned}
&x(0,2)=x(0,1)-1,\\
&x(0,3)=x(0,2)-1,\\
&x(0,4)=x(0,3)-1
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

の関係がある。また (3.28) に対応する関係

$$
x(0,1)+x(0,2)+x(0,3)+x(0,4)=0
\tag{3.79}
$$

を満足する。第2段と第3段の関係を次式で表わす。

$$
\begin{aligned}
A(1,1,2,2)&=x(1,1)BA(1,1,1,2)\\
&=x(1,1)x(0,1)B^2A(1,1,1,1),\\
A(1,2,1,2)&=x(1,2)BA(1,1,1,2)\\
&=x(1,2)x(0,1)B^2A(1,1,1,1),\\
A(2,1,1,2)&=x(1,3)BA(1,1,1,2)\\
&=x(1,3)x(0,1)B^2A(1,1,1,1),\\
A(1,1,2,2)&=x(1,4)BA(1,1,2,1)\\
&=x(1,4)x(0,2)B^2A(1,1,1,1),\\
A(1,2,2,1)&=x(1,5)BA(1,1,2,1)\\
&=x(1,5)x(0,2)B^2A(1,1,1,1),\\
A(2,1,2,1)&=x(1,6)BA(1,1,2,1)\\
&=x(1,6)x(0,2)B^2A(1,1,1,1),\\
A(1,2,1,2)&=x(1,7)BA(1,2,1,1)
\end{aligned}
$$

$$=x(1,7)x(0,3)B^2A(1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,1)=x(1,8)BA(1,2,1,1)$$
$$=x(1,8)x(0,3)B^2A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,1)=x(1,9)BA(1,2,1,1)$$
$$=x(1,9)x(0,3)B^2A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,2)=x(1,10)BA(2,1,1,1)$$
$$=x(1,10)x(0,4)B^2A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,1)=x(1,11)BA(2,1,1,1)$$
$$=x(1,11)x(0,4)B^2A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,1)=x(1,12)BA(2,1,1,1)$$
$$=x(1,12)x(0,4)B^2A(1,1,1,1). \tag{3.80}$$

(3.53) ～ (3.58) より

$$x(1,1)x(0,1)=x(1,4)x(0,2)=\frac{7}{6},$$
$$x(1,2)x(0,1)=x(1,7)x(0,3)=-\frac{1}{3},$$
$$x(1,5)x(0,2)=x(1,8)x(0,3)=\frac{1}{6},$$
$$x(1,6)x(0,2)=x(1,11)x(0,4)=-\frac{1}{3},$$
$$x(1,9)x(0,3)=x(1,12)x(0,4)=\frac{7}{6},$$
$$x(1,3)x(0,1)=x(1,10)x(0,4)=-\frac{11}{6} \tag{3.81}$$

となり，(3.77) より

$$x(1,1)=\frac{7}{9},\ x(1,2)=-\frac{2}{9},\ x(1,3)=-\frac{11}{9},$$
$$x(1,4)=\frac{7}{3},\ x(1,5)=\frac{1}{3},\ x(1,6)=-\frac{2}{3},$$
$$x(1,7)=\frac{2}{3},\ x(1,8)=-\frac{1}{3},\ x(1,9)=-\frac{7}{3},$$
$$x(1,10)=\frac{11}{9},\ x(1,11)=\frac{2}{9},\ x(1,12)=-\frac{7}{9} \tag{3.82}$$

となる。この場合

$$x(1,2)=x(1,1)-1,$$
$$x(1,3)=x(1,2)-1,$$
$$x(1,5)=x(1,4)-2,$$
$$x(1,6)=x(1,5)-1,$$
$$x(1,8)=x(1,7)-1,$$
$$x(1,9)=x(1,8)-2,$$
$$x(1,11)=x(1,10)-1,$$
$$x(1,12)=x(1,11)-1 \tag{3.83}$$

の関係がある。また (3.29) に対応する関係

$$x(1,1)x(0,1)+x(1,2)x(0,1)+x(1,5)x(0,2)$$
$$+x(1,6)x(0,2)+x(1,9)x(0,3)$$
$$+x(1,3)x(0,1)=0 \tag{3.84}$$

を満足する。第３段と第４段の関係を次式で表わす。

$$A(1,2,2,2)=x(2,1)BA(1,1,2,2)$$
$$=x(2,1)x(1,1)x(0,1)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2)=x(2,2)BA(1,1,2,2)$$
$$=x(2,1)x(1,1)x(0,1)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,2)=x(2,3)BA(1,2,1,2)$$
$$=x(2,3)x(1,2)x(0,1)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2)=x(2,4)BA(1,2,1,2)$$
$$=x(2,4)x(1,2)x(0,1)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2)=x(2,5)BA(2,1,1,2)$$
$$=x(2,5)x(1,3)x(0,1)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2)=x(2,6)BA(2,1,1,2)$$
$$=x(2,6)x(1,3)x(0,1)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,2)=x(2,7)BA(1,1,2,2)$$
$$=x(2,7)x(1,4)x(0,2)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2)=x(2,8)BA(1,1,2,2)$$
$$=x(2,8)x(1,4)x(0,2)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,2)=x(2,9)BA(1,2,2,1)$$
$$=x(2,9)x(1,5)x(0,2)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1)=x(2,10)BA(1,2,2,1)$$
$$=x(2,10)x(1,5)x(0,2)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2)=x(2,11)BA(2,1,2,1)$$
$$=x(2,11)x(1,6)x(0,2)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1)=x(2,12)BA(2,1,2,1)$$
$$=x(2,12)x(1,6)x(0,2)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,2)=x(2,13)BA(1,2,1,2)$$
$$=x(2,13)x(1,7)x(0,3)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2)=x(2,14)BA(1,2,1,2)$$
$$=x(2,14)x(1,7)x(0,3)B^3A(1,1,1,1),$$

$$A(1,2,2,2)=x(2,15)BA(1,2,2,1)$$
$$=x(2,15)x(1,8)x(0,3)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1)=x(2,16)BA(1,2,2,1)$$
$$=x(2,16)x(1,8)x(0,3)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2)=x(2,17)BA(2,2,1,1)$$
$$=x(2,17)x(1,9)x(0,3)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1)=x(2,18)BA(2,2,1,1)$$
$$=x(2,18)x(1,9)x(0,3)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2)=x(2,19)BA(2,1,1,2)$$
$$=x(2,19)x(1,10)x(0,4)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2)=x(2,20)BA(2,1,1,2)$$
$$=x(2,20)x(1,10)x(0,4)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2)=x(2,21)BA(2,1,2,1)$$
$$=x(2,21)x(1,11)x(0,4)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1)=x(2,22)BA(2,1,2,1)$$
$$=x(2,22)x(1,11)x(0,4)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2)=x(2,23)BA(2,2,1,1)$$
$$=x(2,23)x(1,12)x(0,4)B^3A(1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1)=x(2,24)BA(2,2,1,1)$$
$$=x(2,24)x(1,12)x(0,4)B^3A(1,1,1,1). \tag{3.85}$$

(3.64) (3.65) (3.66) (3.67) より

$$x(2,1)x(1,1)x(0,1)=x(2,3)x(1,2)x(0,1)$$
$$=x(2,7)x(1,4)x(0,2)=x(2,9)x(1,5)x(0,2)$$
$$=x(2,13)x(1,7)x(0,3)$$
$$=x(2,15)x(1,8)x(0,3)=\frac{1}{4},$$
$$x(2,2)x(1,1)x(0,1)=x(2,5)x(1,3)x(0,1)$$
$$=x(2,8)x(1,4)x(0,2)=x(2,11)x(1,6)x(0,2)$$
$$=x(2,19)x(1,10)x(0,4)$$
$$=x(2,21)x(1,11)x(0,4)=-\frac{11}{12},$$
$$x(2,4)x(1,2)x(0,1)=x(2,6)x(1,3)x(0,1)$$
$$=x(2,14)x(1,7)x(0,3)=x(2,17)x(1,9)x(0,3)$$
$$=x(2,20)x(1,10)x(0,4)$$
$$=x(2,23)x(1,12)x(0,4)=\frac{11}{12},$$
$$x(2,10)x(1,5)x(0,2)=x(2,12)x(1,6)x(0,2)$$
$$=x(2,16)x(1,8)x(0,3)=x(2,18)x(1,9)x(0,3)$$
$$=x(2,22)x(1,11)x(0,4)$$
$$=x(2,24)x(1,12)x(0,4)=-\frac{1}{4} \tag{3.86}$$

である。ここで (3.77) (3.82) より

$$x(2,1)=\frac{3}{14},\quad x(2,2)=-\frac{11}{14},$$
$$x(2,3)=-\frac{3}{4},\quad x(2,4)=-\frac{11}{4},$$
$$x(2,5)=\frac{1}{2},\quad x(2,6)=-\frac{1}{2},$$
$$x(2,7)=\frac{3}{14},\quad x(2,8)=-\frac{11}{14},$$
$$x(2,9)=\frac{3}{2},\quad x(2,10)=-\frac{3}{2},$$
$$x(2,11)=\frac{11}{4},\quad x(2,12)=\frac{3}{4},$$
$$x(2,13)=-\frac{3}{4},\quad x(2,14)=-\frac{11}{4},$$
$$x(2,15)=\frac{3}{2},\quad x(2,16)=-\frac{3}{2},$$
$$x(2,17)=\frac{11}{14},\quad x(2,18)=-\frac{3}{14},$$
$$x(2,19)=\frac{1}{2},\quad x(2,20)=-\frac{1}{2},$$
$$x(2,21)=\frac{11}{4},\quad x(2,22)=\frac{3}{4},$$
$$x(2,23)=\frac{11}{14},\quad x(2,24)=-\frac{3}{14} \tag{3.87}$$

となる。この場合

$$x(2,2)=x(2,1)-1,$$
$$x(2,4)=x(2,3)-2,$$
$$x(2,6)=x(2,5)-1,$$
$$x(2,8)=x(2,7)-1,$$
$$x(2,10)=x(2,9)-3,$$
$$x(2,12)=x(2,11)-2,$$
$$x(2,14)=x(2,13)-2,$$
$$x(2,16)=x(2,15)-3,$$
$$x(2,18)=x(2,17)-1,$$
$$x(2,20)=x(2,19)-1,$$

$x(2,22)=x(2,21)-2,$
$x(2,24)=x(2,23)-1$

$$(3.88)$$

の関係があり，(3.30) に対応する関係

$$x(2,1)x(1,1)x(0,1)+x(2,2)x(1,1)x(0,1)+x(2,4)x(1,2)x(0,1)+x(2,10)x(1,5)x(0,2)=0 \quad (3.89)$$

を満足する。

図１と図２のツリー構造は$N=3$の場合，第１段は１個，第２段は３個，第３段は６個からなる。第３段の６個には同じ成分も含まれており，３種類の成分からなる。$N=4$の場合，第１段は１個，第２段は４個，第３段は12個，第４段は24個からなる。第３段は６種類，第４段は４種類の成分からなる。この結果から，一般のN個の場合は第１段は１個，第２段はN個，第３段は$N(N-1)$個，第４段は$N(N-1)(N-2)$個であり，第N段は$N(N-1)(N-2)\cdots 2$個である。係数$A(k_1, k_2, \cdots, k_{N-1}, k_N)$の相異なる成分の数は第２段は${}_NC_1$個，第３段は${}_NC_2$個，第４段は${}_NC_3$個であり，第$(N-1)$段は${}_NC_{N-2}$個，第N段は${}_NC_{N-1}$個である。

最後に，ツリー構造の同一段内の関係に注目する。$N=3$の場合，第２段の(3.73)(3.74)，第３段の(3.85)(3.86)であり，$N=4$の場合，第２段の(3.92)(3.93)(3.94)，第３段の(3.115)～(3.122)，第４段の(3.153)～(3.164)である。ツリー構造は上の段の１のうち１個の１だけ$1\rightarrow 2$に変換することによって作られる。例えば$N=4$の場合（図２）の第２段に注目すると右から次のように配置されている。

$$A(2,1,1,1)\underset{1回}{\longleftarrow}A(1,2,1,1)\underset{1回}{\longleftarrow}A(1,1,2,1)\underset{1回}{\longleftarrow}A(1,1,1,2)$$

置換$1\longleftrightarrow 2$を繰り返すことにより，２を右から左へ移行できる。この場合は１回の置換だけが行われる。第３段の次の配置を考える。

$$A(2,1,2,1)\underset{1回}{\longleftarrow}A(1,2,2,1)\underset{2回}{\longleftarrow}A(1,1,2,2)$$

この場合も置換$1\longleftrightarrow 2$の回数は２を右から左へ移行する場合，２回と１回である。第４段の次の配置の場合

$$A(2,1,2,2)\underset{1回}{\longleftarrow}A(1,2,2,2)$$

$$A(2,2,2,1)\underset{3回}{\longleftarrow}A(1,2,2,2)$$

$$A(2,2,2,1)\underset{1回}{\longleftarrow}A(2,1,2,2)$$

それぞれ１回，３回，１回である。以上の結果を考慮すると，同一段内の関係 (3.92) (3.93) (3.94)，(3.115)～(3.122)，(3.153)～(3.164) において次の関係が成り立つことが分かる。

$$x(l,m)=x(l,m-1)-a \quad (3.90)$$

ここで数字aは置換$1\longleftrightarrow 2$の回数を表わしている。

第４章　$N=5$，６の場合

本章では，第３章で導いた係数A $(k_1, k_2, \cdots, k_{N-1}, k_N)$ の導出の方法に従って$N=5$，６の場合の結果を導く。

$N=5$の場合，最初に第２段を考える。

$A(1,1,1,1,2)=x(0,1)BA(1,1,1,1,1),$
$A(1,1,1,2,1)=x(0,2)BA(1,1,1,1,1),$
$A(1,1,2,1,1)=x(0,3)BA(1,1,1,1,1),$
$A(1,2,1,1,1)=x(0,4)BA(1,1,1,1,1),$
$A(2,1,1,1,1)=x(0,5)BA(1,1,1,1,1),$

$$(4.1)$$

ここで

$x(0,2)=x(0,1)-1,$
$x(0,3)=x(0,2)-1=x(0,1)-2,$
$x(0,4)=x(0,3)-1=x(0,1)-3,$
$x(0,5)=x(0,4)-1=x(0,1)-4$

$$(4.2)$$

である。ここで (2,25) に対応する関係

$$x(0,1)+x(0,2)+x(0,3)+x(0,4)+x(0,5)=0 \quad (4.3)$$

を使い，(4.2) を代入すると

$$x(0,1)=\frac{1+2+3+4}{5}=2 \quad (4.4)$$

となる。(4.4) を (4.2)へ代入すると

$x(0,2)=1,\ x(0,3)=0,$
$x(0,4)=-1,\ x(0,5)=-2$

$$(4.5)$$

となる。(4.4) (4.5) は (2.46) (2.47) (2.48) (2.50) と一致する。第3段は次となる。

$$\begin{aligned}
&A(1,1,1,2,2)=x(1,1)BA(1,1,1,1,2),\\
&A(1,1,2,1,2)=x(1,2)BA(1,1,1,1,2),\\
&A(1,2,1,1,2)=x(1,3)BA(1,1,1,1,2),\\
&A(2,1,1,1,2)=x(1,4)BA(1,1,1,1,2),\\
&A(1,1,1,2,2)=x(1,5)BA(1,1,1,2,1),\\
&A(1,1,2,2,1)=x(1,6)BA(1,1,1,2,1),\\
&A(1,2,1,2,1)=x(1,7)BA(1,1,1,2,1),\\
&A(2,1,1,2,1)=x(1,8)BA(1,1,1,2,1),\\
&A(1,1,2,1,2)=x(1,9)BA(1,1,2,1,1),\\
&A(1,1,2,2,1)=x(1,10)BA(1,1,2,1,1),\\
&A(1,2,2,1,1)=x(1,11)BA(1,1,2,1,1),\\
&A(2,1,2,1,1)=x(1,12)BA(1,1,2,1,1),\\
&A(1,2,1,1,2)=x(1,13)BA(1,2,1,1,1),\\
&A(1,2,1,2,1)=x(1,14)BA(1,2,1,1,1),\\
&A(1,2,2,1,1)=x(1,15)BA(1,2,1,1,1),\\
&A(2,2,1,1,1)=x(1,16)BA(1,2,1,1,1),\\
&A(2,1,1,1,2)=x(1,17)BA(2,1,1,1,1),\\
&A(2,1,1,2,1)=x(1,18)BA(2,1,1,1,1),\\
&A(2,1,2,1,1)=x(1,19)BA(2,1,1,1,1),\\
&A(2,2,1,1,1)=x(1,20)BA(2,1,1,1,1),
\end{aligned}\tag{4.6}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&x(1,2)=x(1,1)-1,\\
&x(1,3)=x(1,2)-1=x(1,1)-2,\\
&x(1,4)=x(1,3)-1=x(1,1)-3,\\
&x(1,6)=x(1,5)-2,\\
&x(1,7)=x(1,6)-1=x(1,5)-3,\\
&x(1,8)=x(1,7)-1=x(1,5)-4,\\
&x(1,10)=x(1,9)-1,\\
&x(1,11)=x(1,10)-2=x(1,9)-3,\\
&x(1,12)=x(1,11)-1=x(1,9)-4,\\
&x(1,14)=x(1,13)-1,\\
&x(1,15)=x(1,14)-1=x(1,13)-2,\\
&x(1,16)=x(1,15)-2=x(1,13)-4,\\
&x(1,18)=x(1,17)-1,\\
&x(1,19)=x(1,18)-1=x(1,17)-2,\\
&x(1,20)=x(1,19)-1=x(1,17)-3
\end{aligned}\tag{4.7}$$

である。(4.6) より

$$\begin{aligned}
A(1,1,1,2,2)&=x(1,1)x(0,1)B^2A(1,1,1,1,1)\\
&=x(1,5)x(0,2)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(1,1,2,1,2)&=x(1,2)x(0,1)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(1,2,1,1,2)&=x(1,3)x(0,1)B^2A(1,1,1,1,1)\\
&=x(1,13)x(0,4)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(2,1,1,1,2)&=x(1,4)x(0,1)B^2A(1,1,1,1,1)\\
&=x(1,17)x(0,5)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(1,1,2,2,1)&=x(1,6)x(0,2)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(1,2,1,2,1)&=x(1,7)x(0,2)B^2A(1,1,1,1,1)\\
&=x(1,14)x(0,4)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(2,1,1,2,1)&=x(1,8)x(0,2)B^2A(1,1,1,1,1)\\
&=x(1,18)x(0,5)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(1,2,2,1,1)&=x(1,15)x(0,4)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(2,1,2,1,1)&=x(1,19)x(0,5)B^2A(1,1,1,1,1),\\
A(2,2,1,1,1)&=x(1,16)x(0,4)B^2A(1,1,1,1,1)\\
&=x(1,20)x(0,5)B^2A(1,1,1,1,1)
\end{aligned}\tag{4.8}$$

となり，(4.5) を使うと

$$\begin{aligned}
&x(1,5)=\frac{x(0,1)}{x(0,2)}x(1,1)=2x(1,1),\\
&x(1,13)=\frac{x(0,1)}{x(0,4)}x(1,3)=-2x(1,3),\\
&x(1,17)=\frac{x(0,1)}{x(0,5)}x(1,4)=-x(1,4),\\
&x(1,14)=\frac{x(0,2)}{x(0,4)}x(1,7)=-x(1,7),\\
&x(1,18)=\frac{x(0,2)}{x(0,5)}x(1,8)=-\frac{1}{2}x(1,8),\\
&x(1,20)=\frac{x(0,4)}{x(0,5)}x(1,16)=\frac{1}{2}x(1,16)
\end{aligned}\tag{4.9}$$

となる。(4.9) を (4.7) へ代入すると

$x(1,2)=x(1,1)-1,$
$x(1,3)=x(1,1)-2,$
$x(1,4)=x(1,1)-3,$
$x(1,5)=2x(1,1),$

$$x(1,6)=2x(1,1)-2,$$
$$x(1,7)=2x(1,1)-3,$$
$$x(1,8)=2x(1,1)-4,$$
$$x(1,13)=-2x(1,1)+4,$$
$$x(1,14)=-2x(1,1)+3,$$
$$x(1,15)=-2x(1,1)+2,$$
$$x(1,16)=-2x(1,1),$$
$$x(1,17)=-x(1,1)+3,$$
$$x(1,18)=-x(1,1)+2,$$
$$x(1,19)=-x(1,1)+1,$$
$$x(1,20)=-x(1,1) \tag{4.10}$$

となり，$x(1,9)\sim x(1,12)$ は$x(0,3)=0$より存在しない。ここで

$$x(1,1)x(0,1)+x(1,2)x(0,1)+x(1,3)x(0,1)+x(1,4)x(0,1)+x(1,6)x(0,2)+x(1,7)x(0,2)+x(1,8)x(0,2)+x(1,15)x(0,4)+x(1,19)x(0,5)+x(1,16)x(0,4)=0 \tag{4.11}$$

の関係と（4.5)，（4.10）を使うと

$$x(1,1)=\frac{5}{4} \tag{4.12}$$

となる。(4.12）を（4.10）へ代入すると

$$x(1,2)=\frac{1}{4},\quad x(1,3)=-\frac{3}{4},$$
$$x(1,4)=-\frac{7}{4},\quad x(1,5)=\frac{5}{2},$$
$$x(1,6)=\frac{1}{2},\quad x(1,7)=-\frac{1}{2},$$
$$x(1,8)=-\frac{3}{2},\quad x(1,13)=\frac{3}{2},$$
$$x(1,14)=\frac{1}{2},\quad x(1,15)=-\frac{1}{2},$$
$$x(1,16)=-\frac{5}{2},\quad x(1,17)=\frac{7}{4},$$
$$x(1,18)=\frac{3}{4},\quad x(1,19)=-\frac{1}{4},$$
$$x(1,20)=-\frac{5}{4} \tag{4.13}$$

となる。(4.5)，(4.12)，(4.13）より

$$A(1,1,1,2,2)=\frac{5}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(1,1,2,1,2)=\frac{1}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,1,1,2)=-\frac{3}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,1,2)=-\frac{7}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(1,1,2,2,1)=\frac{1}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,1,2,1)=-\frac{1}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,2,1)=-\frac{3}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,1,1)=\frac{1}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,1,1)=\frac{1}{2}B^2A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,1,1)=\frac{5}{2}B^2A(1,1,1,1,1) \tag{4.14}$$

となる。第４段は

$$A(1,1,2,2,2)=x(2,1)BA(1,1,1,2,2),$$
$$A(1,2,1,2,2)=x(2,2)BA(1,1,1,2,2),$$
$$A(2,1,1,2,2)=x(2,3)BA(1,1,1,2,2),$$
$$A(1,1,2,2,2)=x(2,4)BA(1,1,2,1,2),$$
$$A(1,2,2,1,2)=x(2,5)BA(1,1,2,1,2),$$
$$A(2,1,2,1,2)=x(2,6)BA(1,1,2,1,2),$$
$$A(1,2,1,2,2)=x(2,7)BA(1,2,1,1,2),$$
$$A(1,2,2,1,2)=x(2,8)BA(1,2,1,1,2),$$
$$A(2,2,1,1,2)=x(2,9)BA(1,2,1,1,2),$$
$$A(2,1,1,2,2)=x(2,10)BA(2,1,1,1,2),$$
$$A(2,1,2,1,2)=x(2,11)BA(2,1,1,1,2),$$
$$A(2,2,1,1,2)=x(2,12)BA(2,1,1,1,2),$$
$$A(1,1,2,2,2)=x(2,13)BA(1,1,1,2,2),$$
$$A(1,2,1,2,2)=x(2,14)BA(1,1,1,2,2),$$
$$A(2,1,1,2,2)=x(2,15)BA(1,1,1,2,2),$$
$$A(1,1,2,2,2)=x(2,16)BA(1,1,2,2,1),$$

$A(1,2,2,2,1)=x(2,17)BA(1,1,2,2,1),$
$A(2,1,2,2,1)=x(2,18)BA(1,1,2,2,1),$
$A(1,2,1,2,2)=x(2,19)BA(1,2,1,2,1),$
$A(1,2,2,2,1)=x(2,20)BA(1,2,1,2,1),$
$A(2,2,1,2,1)=x(2,21)BA(1,2,1,2,1),$
$A(2,1,1,2,2)=x(2,22)BA(2,1,1,2,1),$
$A(2,1,2,2,1)=x(2,23)BA(2,1,1,2,1),$
$A(2,2,1,2,1)=x(2,24)BA(2,1,1,2,1),$
$A(1,2,1,2,2)=x(2,37)BA(2,1,1,1,2),$
$A(1,2,2,1,2)=x(2,38)BA(2,1,1,1,2),$
$A(2,2,1,1,2)=x(2,39)BA(2,1,1,1,2),$
$A(1,2,1,2,2)=x(2,40)BA(2,1,1,2,1),$
$A(1,2,2,2,1)=x(2,41)BA(2,1,1,2,1),$
$A(2,2,1,2,1)=x(2,42)BA(2,1,1,2,1),$
$A(1,2,2,1,2)=x(2,43)BA(2,1,2,1,1),$
$A(1,2,2,2,1)=x(2,44)BA(2,1,2,1,1),$
$A(2,2,2,1,1)=x(2,45)BA(2,1,2,1,1),$
$A(2,2,1,1,2)=x(2,46)BA(2,2,1,1,1),$
$A(2,2,1,2,1)=x(2,47)BA(2,2,1,1,1),$
$A(2,2,2,1,1)=x(2,48)BA(2,2,1,1,1),$
$A(2,1,1,2,2)=x(2,49)BA(2,1,1,1,2),$
$A(2,1,2,1,2)=x(2,50)BA(2,1,1,1,2),$
$A(2,2,1,1,2)=x(2,51)BA(2,1,1,1,2),$
$A(2,1,1,2,2)=x(2,52)BA(2,1,1,2,1),$
$A(2,1,2,2,1)=x(2,53)BA(2,1,1,2,1),$
$A(2,2,1,2,1)=x(2,54)BA(2,1,1,2,1),$
$A(2,1,2,1,2)=x(2,55)BA(2,1,2,1,1),$
$A(2,1,2,2,1)=x(2,56)BA(2,1,2,1,1),$
$A(2,2,2,1,1)=x(2,57)BA(2,1,2,1,1),$
$A(2,2,1,1,2)=x(2,58)BA(2,2,1,1,1),$
$A(2,2,1,2,1)=x(2,59)BA(2,2,1,1,1),$
$A(2,2,2,1,1)=x(2,60)BA(2,2,1,1,1),$

(4.15)

とおき，ここで

$x(2,2)=x(2,1)-1,$
$x(2,3)=x(2,2)-1=x(2,1)-2,$
$x(2,5)=x(2,4)-2,$
$x(2,6)=x(2,5)-1=x(2,4)-3,$
$x(2,8)=x(2,7)-1,$
$x(2,9)=x(2,8)-2=x(2,7)-3,$
$x(2,11)=x(2,10)-1,$
$x(2,12)=x(2,11)-1=x(2,10)-2,$
$x(2,14)=x(2,13)-1,$
$x(2,15)=x(2,14)-1=x(2,13)-2,$
$x(2,17)=x(2,16)-3,$
$x(2,18)=x(2,17)-1=x(2,16)-4,$
$x(2,20)=x(2,19)-2,$
$x(2,21)=x(2,20)-2=x(2,19)-4,$
$x(2,23)=x(2,22)-2,$
$x(2,24)=x(2,23)-1=x(2,22)-3,$
$x(2,38)=x(2,37)-1,$
$x(2,39)=x(2,38)-2=x(2,37)-3,$
$x(2,41)=x(2,40)-2,$
$x(2,42)=x(2,41)-2=x(2,40)-4,$
$x(2,44)=x(2,43)-1,$
$x(2,45)=x(2,44)-3=x(2,43)-4,$
$x(2,47)=x(2,46)-1,$
$x(2,48)=x(2,47)-1=x(2,46)-2,$
$x(2,50)=x(2,49)-1,$
$x(2,51)=x(2,50)-1=x(2,49)-2,$
$x(2,53)=x(2,52)-2,$
$x(2,54)=x(2,53)-1=x(2,52)-3,$
$x(2,56)=x(2,55)-1,$
$x(2,57)=x(2,56)-2=x(2,55)-3,$
$x(2,59)=x(2,58)-1,$
$x(2,60)=x(2,59)-1=x(2,58)-2$

(4.16)

である。$x(2,25)\sim x(2,36)$ は$x(0,3)=0$ より存在しない。

(4.15) より

$A(1,1,2,2,2)$
$=x(2,1)x(1,1)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,4)x(1,2)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,13)x(1,5)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,16)x(1,6)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(1,2,1,2,2)$
$=x(2,2)x(1,1)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,7)x(1,3)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,14)x(1,5)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,19)x(1,7)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$

$=x(2,37)x(1,13)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,40)x(1,14)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$

$A(2,1,1,2,2)$
$=x(2,3)x(1,1)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,10)x(1,4)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,15)x(1,5)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,22)x(1,8)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,49)x(1,17)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,52)x(1,18)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(1,2,2,1,2)$
$=x(2,5)x(1,2)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,8)x(1,3)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,38)x(1,13)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,43)x(1,15)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(2,1,2,1,2)$
$=x(2,6)x(1,2)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,11)x(1,4)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,50)x(1,17)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,55)x(1,19)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(2,2,1,1,2)$
$=x(2,9)x(1,3)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,12)x(1,4)x(0,1)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,39)x(1,13)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,46)x(1,16)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,51)x(1,17)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,58)x(1,20)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(1,2,2,2,1)$
$=x(2,17)x(1,6)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,20)x(1,7)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,41)x(1,14)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,44)x(1,15)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(2,1,2,2,1)$
$=x(2,18)x(1,6)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,23)x(1,8)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,53)x(1,18)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,56)x(1,19)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(2,2,1,2,1)$
$=x(2,21)x(1,7)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,24)x(1,8)x(0,2)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,42)x(1,14)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,47)x(1,16)x(0,4)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,54)x(1,18)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1)$
$=x(2,59)x(1,20)x(0,5)B^3A(1,1,1,1,1),$

$A(2,2,2,1,1)$
$=x(2,45)x(1,15)x(0,4)$
$=x(2,48)x(1,16)x(0,4)$
$=x(2,57)x(1,19)x(0,5)$
$=x(2,60)x(1,20)x(0,5)$

(4.17)

となり，(4.4)（4.5)（4.12)（4.13）を使うと

$$x(2,4)=\frac{x(1,1)}{x(1,2)}x(2,1)=5x(2,1),$$

$$x(2,13)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,5)x(0,2)}x(2,1)=x(2,1),$$

$$x(2,16)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,6)x(0,2)}x(2,1)=5x(2,1),$$

$$x(2,7)=\frac{x(1,1)}{x(1,3)}x(2,2)=-\frac{5}{3}x(2,2),$$

$$x(2,14)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,5)x(0,2)}x(2,2)=x(2,2),$$

$$x(2,19)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,7)x(0,2)}x(2,2)=-5x(2,2),$$

$$x(2,37)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,13)x(0,4)}x(2,2)=-\frac{5}{3}x(2,2),$$

$$x(2,40)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,14)x(0,4)}x(2,2)=-5x(2,2),$$

$$x(2,10)=\frac{x(1,1)}{x(1,4)}x(2,3)=-\frac{5}{7}x(12,3),$$

$$x(2,15)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,5)x(0,2)}x(2,3)=x(2,3),$$

$$x(2,22)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,8)x(0,2)}x(2,3)=-\frac{5}{3}x(2,3),$$

$$x(2,49)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,17)x(0,5)}x(2,3)=-\frac{5}{7}x(2,3),$$

$$x(2,52)=\frac{x(1,1)x(0,1)}{x(1,18)x(0,5)}x(2,3)=-\frac{5}{3}x(2,3),$$

$$x(2,8)=\frac{x(1,2)}{x(1,3)}x(2,5)=-\frac{1}{3}x(2,5),$$

$$x(2,38)=\frac{x(1,2)x(0,1)}{x(1,13)x(0,4)}x(2,5)=-\frac{1}{3}x(2,5),$$

$$x(2,43)=\frac{x(1,2)x(0,1)}{x(1,15)x(0,4)}x(2,5)=x(2,5),$$

$$x(2,11)=\frac{x(1,2)}{x(1,4)}x(2,6)=-\frac{1}{7}x(2,6),$$

$$x(2,50)=\frac{x(1,2)x(0,1)}{x(1,17)x(0,5)}x(2,6)=-\frac{1}{7}x(2,6),$$

$$x(2,55)=\frac{x(1,2)x(0,1)}{x(1,19)x(0,5)}x(2,6)=x(2,6),$$

$$x(2,12)=\frac{x(1,3)}{x(1,4)}x(2,9)=\frac{3}{7}x(2,9),$$

$$x(2,39)=\frac{x(1,3)x(0,1)}{x(1,13)x(0,4)}x(2,9)=x(2,9),$$

$$x(2,46)=\frac{x(1,3)x(0,1)}{x(1,16)x(0,4)}x(2,9)=-\frac{3}{5}x(2,9),$$

$$x(2,51)=\frac{x(1,3)x(0,1)}{x(1,17)x(0,5)}x(2,9)=\frac{3}{7}x(12,9),$$

$$x(2,58)=\frac{x(1,3)x(0,1)}{x(1,20)x(0,5)}x(2,9)=-\frac{3}{5}x(2,9),$$

$$x(2,20)=\frac{x(1,6)}{x(1,7)}x(2,17)=-x(2,17),$$

$$x(2,41)=\frac{x(1,6)x(0,2)}{x(1,14)x(0,4)}x(2,17)=-x(2,17),$$

$$x(2,44)=\frac{x(1,6)x(0,2)}{x(1,15)x(0,4)}x(2,17)=x(2,17),$$

$$x(2,23)=\frac{x(1,6)}{x(1,8)}x(2,18)=-\frac{1}{3}x(2,18),$$

$$x(2,53)=\frac{x(1,6)x(0,2)}{x(1,18)x(0,5)}x(2,18)=-\frac{1}{3}x(2,18),$$

$$x(2,56)=\frac{x(1,6)x(0,2)}{x(1,19)x(0,5)}x(2,18)=x(2,18),$$

$$x(2,24)=\frac{x(1,7)}{x(1,8)}x(2,21)=\frac{1}{3}x(2,21),$$

$$x(2,42)=\frac{x(1,7)x(0,2)}{x(1,14)x(0,4)}x(2,21)=x(2,21),$$

$$x(2,47)=\frac{x(1,7)x(0,2)}{x(1,16)x(0,4)}x(2,21)=-\frac{1}{5}x(2,21),$$

$$x(2,54)=\frac{x(1,7)x(0,2)}{x(1,18)x(0,5)}x(2,21)=\frac{1}{3}x(2,21),$$

$$x(2,59)=\frac{x(1,7)x(0,2)}{x(1,20)x(0,5)}x(2,21)=-\frac{1}{5}x(2,21),$$

$$x(2,48)=\frac{x(1,15)}{x(1,16)}x(2,45)=\frac{1}{5}x(2,45),$$

$$x(2,57)=\frac{x(1,15)x(0,4)}{x(1,19)x(0,5)}x(2,45)=x(2,45),$$

$$x(2,60)=\frac{x(1,15)x(0,4)}{x(1,20)x(0,5)}x(2,45)=\frac{1}{5}x(2,45) \tag{4.18}$$

となる。(4.16) と (4.18) を

$$\begin{aligned}&x(2,1)x(1,1)x(0,1)+x(2,2)x(1,1)x(0,1)\\&+x(2,3)x(1,1)x(0,1)+x(2,5)x(1,2)x(0,1)\\&+x(2,6)x(1,2)x(0,1)+x(2,9)x(1,3)x(0,1)\\&+x(2,17)x(1,6)x(0,2)\\&+x(2,18)x(1,6)x(0,2)\\&+x(2,21)x(1,7)x(0,2)\\&+x(2,45)x(1,15)x(0,4)=0\end{aligned} \tag{4.19}$$

に代入し，(4.4) (4.5) (4.12) (4.13) を使うと

$$x(2,1)=\frac{3}{5} \tag{4.20}$$

となる。この結果を (4.16) (4.18) に代入し，計算すると

$$x(2,2)=-\frac{2}{5},\quad x(2,3)=-\frac{7}{5},$$

$$x(2,4)=3,\qquad x(2,5)=1,$$

$$x(2,6)=0,\qquad x(2,7)=\frac{2}{3},$$

$$x(2,8)=-\frac{1}{3},\quad x(2,9)=-\frac{7}{3},$$

$$x(2,10)=1,\qquad x(2,11)=0,$$

$$x(2,12)=-1,\quad x(2,13)=\frac{3}{5},$$

$$x(2,14)=-\frac{2}{5},\quad x(2,15)=-\frac{7}{5},$$

$$x(2,16)=3,\qquad x(2,17)=0,$$

$$x(2,18)=-1,\quad x(2,19)=2,$$

$$
\begin{aligned}
&x(2,20)=0, && x(2,21)=-2,\\
&x(2,23)=\frac{1}{3}, && x(2,24)=-\frac{2}{3},\\
&x(2,37)=\frac{2}{3}, && x(2,38)=-\frac{1}{3},\\
&x(2,39)=-\frac{7}{3}, && x(2,40)=2,\\
&x(2,41)=0, && x(2,42)=-2,\\
&x(2,43)=1, && x(2,44)=0,\\
&x(2,45)=-3, && x(2,46)=\frac{7}{5},\\
&x(2,47)=\frac{2}{5}, && x(2,48)=-\frac{3}{5},\\
&x(2,49)=1, && x(2,50)=0,\\
&x(2,51)=-1, && x(2,52)=\frac{7}{3},\\
&x(2,53)=\frac{1}{3}, && x(2,54)=-\frac{2}{3},\\
&x(2,55)=0, && x(2,56)=-1,\\
&x(2,57)=-3, && x(2,58)=\frac{7}{5},\\
&x(2,59)=\frac{2}{5}, && x(2,60)=-\frac{3}{5},
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
&A(1,1,2,2,2)=\frac{3}{2}B^3A(1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,1,2,2)=-B^3A(1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,1,2,2)=-\frac{7}{2}B^3A(1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,2,1,2)=\frac{1}{2}B^3A(1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,2,1,2)=0,\\
&A(2,2,1,1,2)=\frac{7}{2}B^3A(1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,2,2,1)=0,\\
&A(2,1,2,2,1)=-\frac{1}{2}B^3A(1,1,1,1,1),\\
&A(2,2,1,2,1)=B^3A(1,1,1,1,1),\\
&A(2,2,2,1,1)=-\frac{3}{2}B^3A(1,1,1,1,1),
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

となる。この結果は（2.29）の関係を満足している。第５段は次となる。

$$
\begin{aligned}
&A(1,2,2,2,2)=x(3,1)B^4A(1,1,2,2,2),\\
&A(2,1,2,2,2)=x(3,2)B^4A(1,1,2,2,2),\\
&A(1,2,2,2,2)=x(3,3)B^4A(1,2,1,2,2),\\
&A(2,2,1,2,2)=x(3,4)B^4A(1,2,1,2,2),\\
&A(2,1,2,2,2)=x(3,5)B^4A(2,1,1,2,2),\\
&A(2,2,1,2,2)=x(3,6)B^4A(2,1,1,2,2),\\
&A(1,2,2,2,2)=x(3,7)B^4A(1,1,2,2,2),\\
&A(2,1,2,2,2)=x(3,8)B^4A(1,1,2,2,2),\\
&A(1,2,2,2,2)=x(3,9)B^4A(1,2,2,1,2),\\
&A(2,2,2,1,2)=x(3,10)B^4A(1,2,2,1,2),\\
&A(2,1,2,2,2)=x(3,11)B^4A(2,1,2,1,2),\\
&A(2,2,2,1,2)=x(3,12)B^4A(2,1,2,1,2),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&A(1,2,2,2,2)=x(3,31)B^4A(1,1,2,2,2),\\
&A(2,1,2,2,2)=x(3,32)B^4A(1,1,2,2,2),\\
&A(1,2,2,2,2)=x(3,33)B^4A(1,2,2,2,1),\\
&A(2,2,2,2,1)=x(3,34)B^4A(1,2,2,2,1),\\
&A(2,1,2,2,2)=x(3,35)B^4A(2,1,2,2,1),\\
&A(2,2,2,2,1)=x(3,36)B^4A(2,1,2,2,1),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&A(2,2,1,2,2)=x(3,115)B^4A(2,2,1,1,2),\\
&A(2,2,2,1,2)=x(3,116)B^4A(2,2,1,1,2),\\
&A(2,2,1,2,2)=x(3,117)B^4A(2,2,1,2,1),\\
&A(2,2,2,2,1)=x(3,118)B^4A(2,2,1,2,1),\\
&A(2,2,2,1,2)=x(3,119)B^4A(2,2,2,1,1),\\
&A(2,2,2,2,1)=x(3,120)B^4A(2,2,2,1,1),
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

ここで

$$x(3,2)=x(3,1)-1,$$
$$x(3,4)=x(3,3)-2,$$
$$x(3,6)=x(3,5)-1,$$
$$x(3,8)=x(3,7)-1,$$
$$x(3,10)=x(3,9)-3,$$
$$x(3,12)=x(3,11)-2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x(3,32)=x(3,31)-1,$$
$$x(3,34)=x(3,33)-4,$$
$$x(3,36)=x(3,35)-3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x(3,116)=x(3,115)-1,$$
$$x(3,118)=x(3,117)-2,$$
$$x(3,120)=x(3,119)-1 \tag{4.24}$$

である。大量の式となるので途中の式は省略した。(2.26) に対応する関係は

$$x(3,1)x(2,1)x(1,1)x(0,1)$$
$$+x(3,2)x(2,1)x(1,1)x(0,1)$$
$$+x(3,4)x(2,2)x(1,1)x(0,1)$$
$$+x(3,10)x(2,5)x(1,2)x(0,1)$$
$$+x(3,36)x(2,18)x(1,6)x(0,2)=0 \tag{4.25}$$

であるので，第4段の場合と同様な方法で次式を導く。

$$x(3,2)=x(3,1)-1,$$
$$x(3,4)=-\frac{3}{2}x(3,1)-2,$$
$$x(3,10)=3x(3,1)-3,$$
$$x(3,36)=-3x(3,1). \tag{4.26}$$

この結果を (4.25) に代入すると

$$x(3,1)=\frac{2}{15} \tag{4.27}$$

となり，(4.26) より

$$x(3,2)=-\frac{13}{15},\ x(3,4)=-\frac{11}{15},$$
$$x(3,10)=-\frac{13}{5},\ x(3,36)=-\frac{2}{5} \tag{4.28}$$

となる。この結果より

$$A(1,2,2,2,2)=\frac{1}{5}B^4A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2,2)=-\frac{13}{10}B^4A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2,2)=\frac{22}{10}B^4A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1,2)=-\frac{13}{10}B^4A(1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,2,1)=\frac{1}{5}B^4A(1,1,1,1,1) \tag{4.29}$$

となり，(2.28) の関係を満足する。

次に $N=6$ の場合を考える。第2段の係数は

$$A(1,1,1,1,1,2)=x(0,1)BA(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,1,1,1,2,1)=x(0,2)BA(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,1,1,2,1,1)=x(0,3)BA(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,1,2,1,1,1)=x(0,4)BA(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,1,1,1,1)=x(0,5)BA(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,1,1,1)=x(0,6)BA(1,1,1,1,1,1) \tag{4.30}$$

であり，ここで

$$x(0,2)=x(0,1)-1,$$
$$x(0,3)=x(0,2)-1=x(0,1)-2,$$
$$x(0,4)=x(0,3)-1=x(0,1)-3,$$
$$x(0,5)=x(0,4)-1=x(0,1)-4,$$
$$x(0,6)=x(0,5)-1=x(0,1)-5 \tag{4.31}$$

である。(2.25) に対応する関係

$$x(0,1)+x(0,2)+x(0,3)+x(0,4)+x(0,5)+x(0,6)=0 \tag{4.32}$$

に (4.31) を代入すると

$$x(0,1)=\frac{5}{2} \tag{4.33}$$

となり，(4.33) を (4.31) へ代入すると

$$x(0,2)=\frac{3}{2},\ x(0,3)=\frac{1}{2},\ x(0,4)=-\frac{1}{2},$$
$$x(0,5)=-\frac{3}{2},\ x(0,6)=-\frac{5}{2}$$

(4.34)

となる。第３段は次である。

$$A(1,1,1,1,2,2)=x(1,1)BA(1,1,1,1,1,2),$$
$$A(1,1,1,2,1,2)=x(1,2)BA(1,1,1,1,1,2),$$
$$A(1,1,2,1,1,2)=x(1,3)BA(1,1,1,1,1,2),$$
$$A(1,2,1,1,1,2)=x(1,4)BA(1,1,1,1,1,2),$$
$$A(2,1,1,1,1,2)=x(1,5)BA(1,1,1,1,1,2),$$
$$A(1,1,1,1,2,2)=x(1,6)BA(1,1,1,1,2,1),$$
$$A(1,1,1,2,2,1)=x(1,7)BA(1,1,1,1,2,1),$$
$$A(1,1,2,1,2,1)=x(1,8)BA(1,1,1,1,2,1),$$
$$A(1,2,1,1,2,1)=x(1,9)BA(1,1,1,1,2,1),$$
$$A(2,1,1,1,2,1)=x(1,10)BA(1,1,1,1,2,1),$$
$$A(1,1,1,2,1,2)=x(1,11)BA(1,1,1,2,1,1),$$
$$A(1,1,1,2,2,1)=x(1,12)BA(1,1,1,2,1,1),$$
$$A(1,1,2,2,1,1)=x(1,13)BA(1,1,1,2,1,1),$$
$$A(1,2,1,2,1,1)=x(1,14)BA(1,1,1,2,1,1),$$
$$A(2,1,1,2,1,1)=x(1,15)BA(1,1,1,2,1,1),$$
$$A(1,1,2,1,1,2)=x(1,16)BA(1,1,2,1,1,1),$$
$$A(1,1,2,1,2,1)=x(1,17)BA(1,1,2,1,1,1),$$
$$A(1,1,2,2,1,1)=x(1,18)BA(1,1,2,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,1,1,1)=x(1,19)BA(1,1,2,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,1,1,1)=x(1,20)BA(1,1,2,1,1,1),$$
$$A(1,2,1,1,1,2)=x(1,21)BA(1,2,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,1,1,2,1)=x(1,22)BA(1,2,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,1,2,1,1)=x(1,23)BA(1,2,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,1,1,1)=x(1,24)BA(1,2,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,1,1,1)=x(1,25)BA(1,2,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,1,1,2)=x(1,26)BA(2,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,1,2,1)=x(1,27)BA(2,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,2,1,1)=x(1,28)BA(2,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,1,1,1)=x(1,29)BA(2,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,1,1,1)=x(1,30)BA(2,1,1,1,1,1), \tag{4.35}$$

ここで

$$x(1,2)=x(1,1)-1,$$
$$x(1,3)=x(1,2)-1=x(1,1)-2,$$
$$x(1,4)=x(1,3)-1=x(1,1)-3,$$
$$x(1,5)=x(1,4)-1=x(1,1)-4,$$
$$x(1,7)=x(1,6)-2,$$
$$x(1,8)=x(1,7)-1=x(1,6)-3,$$
$$x(1,9)=x(1,8)-1=x(1,6)-4,$$
$$x(1,10)=x(1,9)-1=x(1,6)-5,$$
$$x(1,12)=x(1,11)-1,$$
$$x(1,13)=x(1,12)-2=x(1,11)-3,$$
$$x(1,14)=x(1,13)-1=x(1,11)-4,$$
$$x(1,15)=x(1,14)-1=x(1,11)-5,$$
$$x(1,17)=x(1,16)-1,$$
$$x(1,18)=x(1,17)-1=x(1,16)-2,$$
$$x(1,19)=x(1,18)-2=x(1,16)-4,$$
$$x(1,20)=x(1,19)-1=x(1,16)-5,$$
$$x(1,22)=x(1,21)-1,$$
$$x(1,23)=x(1,22)-1=x(1,21)-2,$$
$$x(1,24)=x(1,23)-1=x(1,21)-3,$$
$$x(1,25)=x(1,24)-2=x(1,21)-5,$$
$$x(1,27)=x(1,26)-1,$$
$$x(1,28)=x(1,27)-1=x(1,26)-2,$$
$$x(1,29)=x(1,28)-1=x(1,26)-3,$$
$$x(1,30)=x(1,29)-1=x(1,26)-4 \tag{4.36}$$

である。以上の結果を使って$x(1,2)\sim x(1,30)$を$x(1,1)$で表わし，

$$\begin{aligned}&x(1,1)x(0,1)+x(1,2)x(0,1)+x(1,3)x(0,1)\\&+x(1,4)x(0,1)+x(1,5)x(0,1)\\&+x(1,7)x(0,2)+x(1,8)x(0,2)\\&+x(1,9)x(0,2)+x(1,10)x(0,2)\\&+x(1,13)x(0,3)+x(1,14)x(0,3)\\&+x(1,15)x(0,3)+x(1,19)x(0,4)\\&+x(1,20)x(0,4)+x(1,25)x(0,5)=0\end{aligned} \tag{4.37}$$

へ代入すると

$$x(1,1)=\frac{26}{15} \tag{4.38}$$

が求まる。この結果より$x(1,2)\sim x(1,30)$を求めると次となる。

$$x(1,2)=\frac{11}{15},\quad x(1,3)=-\frac{4}{15},\ x(1,4)=-\frac{19}{15},$$

$$x(1,5)=-\frac{34}{15},\ x(1,6)=\frac{26}{9},\quad x(1,7)=\frac{8}{9},$$

$$x(1,8)=-\frac{1}{9},\quad x(1,9)=-\frac{10}{9},\ x(1,10)=-\frac{19}{9},$$

$x(1,11)=\frac{11}{3}$, $x(1,12)=\frac{8}{3}$, $x(1,13)=\frac{2}{3}$,

$x(1,14)=-\frac{1}{3}$, $x(1,15)=-\frac{4}{3}$, $x(1,16)=\frac{4}{3}$,

$x(1,17)=\frac{1}{3}$, $x(1,18)=-\frac{2}{3}$, $x(1,19)=-\frac{8}{3}$,

$x(1,20)=-\frac{11}{3}$, $x(1,21)=\frac{19}{9}$, $x(1,22)=\frac{10}{9}$,

$x(1,23)=\frac{1}{9}$, $x(1,24)=-\frac{8}{9}$, $x(1,25)=-\frac{26}{9}$,

$x(1,26)=\frac{34}{15}$, $x(1,27)=\frac{19}{15}$, $x(1,28)=\frac{4}{15}$,

$x(1,29)=-\frac{11}{15}$, $x(1,30)=-\frac{26}{15}$.

(4.39)

この結果より，係数を求めると

$A(1,1,1,1,2,2)=\frac{13}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,1,1,2,1,2)=\frac{11}{6}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,1,2,1,1,2)=-\frac{2}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,2,1,1,1,2)=-\frac{19}{6}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(2,1,1,1,1,2)=-\frac{17}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,1,1,2,2,1)=\frac{4}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,1,2,1,2,1)=-\frac{1}{6}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,2,1,1,2,1)=-\frac{5}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(2,1,1,1,2,1)=-\frac{19}{6}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,1,2,2,1,1)=\frac{1}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,2,1,2,1,1)=-\frac{1}{6}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(2,1,1,2,1,1)=-\frac{2}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(1,2,2,1,1,1)=\frac{4}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(2,1,2,1,1,1)=\frac{11}{6}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

$A(2,2,1,1,1,1)=\frac{13}{3}B^2A(1,1,1,1,1,1)$,

(4.40)

となる。第4段の係数は

$A(1,1,1,2,2,2)=x(2,1)BA(1,1,1,1,2,2)$,
$A(1,1,2,1,2,2)=x(2,2)BA(1,1,1,1,2,2)$,
$A(1,2,1,1,2,2)=x(2,3)BA(1,1,1,1,2,2)$,
$A(2,1,1,1,2,2)=x(2,4)BA(1,1,1,1,2,2)$,

………

$A(2,2,1,1,1,2)=x(2,117)BA(2,2,1,1,1,1)$,
$A(2,2,1,1,2,1)=x(2,118)BA(2,2,1,1,1,1)$,
$A(2,2,1,2,1,1)=x(2,119)BA(2,2,1,1,1,1)$,
$A(2,2,2,1,1,1)=x(2,120)BA(2,2,1,1,1,1)$

(4.41)

であり，ここで

$x(2,2)=x(2,1)-1$,
$x(2,3)=x(2,2)-1=x(2,1)-2$,
$x(2,4)=x(2,3)-1=x(2,1)-3$,

………

$x(2,118)=x(2,117)-1$,
$x(2,119)=x(2,118)-1=x(2,117)-2$,
$x(2,120)=x(2,119)-1=x(2,117)-3$

(4.42)

である。以上の結果を使って$x(2,2)\sim x(2,120)$を$x(2,1)$で表わし，

$x(2,1)x(1,1)x(0,1)+x(2,2)x(1,1)x(0,1)$
$+x(2,3)x(1,1)x(0,1)+x(2,4)x(1,1)x(0,1)$
$+x(2,6)x(1,2)x(0,1)+x(2,7)x(1,2)x(0,1)$
$+x(2,8)x(1,2)x(0,1)+x(2,11)x(1,3)x(0,1)$
$+x(2,12)x(1,3)x(0,1)+x(2,16)x(1,4)x(0,1)$
$+x(2,26)x(1,7)x(0,2)+x(2,27)x(1,7)x(0,2)$
$+x(2,28)x(1,7)x(0,2)+x(2,31)x(1,8)x(0,2)$
$+x(2,32)x(1,8)x(0,2)+x(2,36)x(1,9)x(0,2)$
$+x(2,51)x(1,13)x(0,3)$
$+x(2,52)x(1,13)x(0,3)$
$+x(2,56)x(1,14)x(0,3)$

$$+x(2,76)x(1,19)x(0,4)=0 \tag{4.43}$$

へ代入すると

$$x(2,1)=\frac{27}{26} \tag{4.44}$$

となる。この結果を使うと

$$\begin{aligned}
&x(2,2)=\frac{1}{26}, \quad x(2,3)=-\frac{25}{26}, \; x(2,4)=-\frac{51}{26},\\
&x(2,6)=\frac{5}{11}, \quad x(2,7)=-\frac{6}{11}, \; x(2,8)=-\frac{17}{11},\\
&x(2,11)=-\frac{13}{4}, x(2,12)=-\frac{17}{4}, x(2,16)=-\frac{51}{19},\\
&x(2,26)=\frac{3}{8}, \quad x(2,27)=-\frac{5}{8}, \; x(2,28)=-\frac{13}{8},\\
&x(2,31)=-5, \quad x(2,32)=-6, \quad x(2,36)=-\frac{5}{2},\\
&x(2,51)=-\frac{3}{2}, \; x(2,52)=-\frac{5}{2}, \; x(2,56)=1,\\
&x(2,76)=-\frac{27}{8}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

となり，係数は次となる。

$$\begin{aligned}
&A(1,1,1,2,2,2)=\frac{9}{2}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,1,2,1,2,2)=\frac{1}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,1,1,2,2)=-\frac{25}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,1,1,2,2)=-\frac{17}{2}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,1,2,2,1,2)=\frac{5}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,1,2,1,2)=-B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,1,2,1,2)=-\frac{17}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,2,1,1,2)=\frac{13}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,2,1,1,2)=\frac{17}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,2,1,1,1,2)=\frac{17}{2}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,1,2,2,2,1)=\frac{1}{2}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,1,2,2,1)=-\frac{5}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,1,2,2,1)=-\frac{13}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,2,1,2,1)=\frac{5}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,2,1,2,1)=B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,2,1,1,2,1)=\frac{25}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(1,2,2,2,1,1)=-\frac{1}{2}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,1,2,2,1,1)=-\frac{5}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,2,1,2,1,1)=-\frac{1}{6}B^3A(1,1,1,1,1,1),\\
&A(2,2,2,1,1,1)=-\frac{9}{2}B^3A(1,1,1,1,1,1).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

第５段の係数は

$$\begin{aligned}
&A(1,1,2,2,2,2)=x(3,1)BA(1,1,1,2,2,2),\\
&A(1,2,1,2,2,2)=x(3,2)BA(1,1,1,2,2,2),\\
&A(2,1,1,2,2,2)=x(3,3)BA(1,1,1,2,2,2),\\
&A(1,1,2,2,2,2)=x(3,4)BA(1,1,2,1,2,2),\\
&A(1,2,2,1,2,2)=x(3,5)BA(1,1,2,1,2,2),\\
&A(2,1,2,1,2,2)=x(3,6)BA(1,1,2,1,2,2),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&A(2,2,1,2,1,2)=x(3,355)BA(2,2,1,2,1,1),\\
&A(2,2,1,2,2,1)=x(3,356)BA(2,2,1,2,1,1),\\
&A(2,2,2,2,1,1)=x(3,357)BA(2,2,1,2,1,1),\\
&A(2,2,2,1,1,2)=x(3,358)BA(2,2,2,1,1,1),\\
&A(2,2,2,1,2,1)=x(3,359)BA(2,2,2,1,1,1),\\
&A(2,2,2,2,1,1)=x(3,360)BA(2,2,2,1,1,1)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

であり，ここで

$$x(3,2)=x(3,1)-1,$$

$$x(3,3)=x(3,2)-1=x(3,1)-2,$$
$$x(3,5)=x(3,4)-2,$$
$$x(3,6)=x(3,5)-1=x(3,4)-3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x(3,356)=x(3,355)-1,$$
$$x(3,357)=x(3,356)-2=x(3,355)-3,$$
$$x(3,359)=x(3,358)-1,$$
$$x(3,360)=x(3,359)-1=x(3,358)-2 \tag{4.48}$$

である。以上の結果を使って$x(3,2)\sim x(3,360)$をx(3,1) で表わし,

$$\begin{aligned}&x(3,1)x(2,1)x(1,1)x(0,1)\\&+x(3,2)x(2,1)x(1,1)x(0,1)\\&+x(3,3)x(2,1)x(1,1)x(0,1)\\&+x(3,5)x(2,2)x(1,1)x(0,1)\\&+x(3,6)x(2,2)x(1,1)x(0,1)\\&+x(3,9)x(2,3)x(1,1)x(0,1)\\&+x(3,17)x(2,6)x(1,2)x(0,1)\\&+x(3,18)x(2,6)x(1,2)x(0,1)\\&+x(3,21)x(2,7)x(1,2)x(0,1)\\&+x(3,33)x(2,11)x(1,3)x(0,1)\\&+x(3,77)x(2,26)x(1,7)x(0,2)\\&+x(3,78)x(2,26)x(1,7)x(0,2)\\&+x(3,81)x(2,27)x(1,7)x(0,2)\\&+x(3,93)x(2,31)x(1,8)x(0,2)\\&+x(3,153)x(2,51)x(1,13)x(0,3)=0\end{aligned} \tag{4.49}$$

へ代入し，計算すると

$$x(3,1)=\frac{62}{135},\quad x(3,2)=-\frac{73}{135}, x(3,3)=-\frac{208}{135},$$
$$x(3,5)=\frac{52}{5},\quad x(3,6)=\frac{47}{5},\quad x(3,9)=-\frac{302}{125},$$
$$x(3,17)=-\frac{13}{25}, x(3,18)=-\frac{38}{25}, x(3,21)=-\frac{47}{30},$$
$$x(3,33)=-\frac{16}{5}, x(3,77)=\frac{2}{15},\quad x(3,78)=-\frac{13}{15},$$
$$x(3,81)=-\frac{52}{25}, x(3,93)=-\frac{73}{25}, x(3,153)=-\frac{62}{15} \tag{4.50}$$

となる。係数を求めると

$$A(1,1,2,2,2,2)=\frac{31}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,1,2,2,2)=-\frac{73}{30}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,1,2,2,2)=-\frac{104}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,1,2,2)=\frac{26}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,1,2,2)=\frac{47}{30}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,1,2,2)=\frac{151}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,2,1,2)=-\frac{13}{30}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2,1,2)=-\frac{19}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2,1,2)=\frac{47}{30}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1,1,2)=-\frac{104}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(1,2,2,2,2,1)=\frac{1}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2,2,1)=-\frac{13}{30}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2,2,1)=\frac{26}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1,2,1)=-\frac{73}{30}B^4A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,2,1,1)=\frac{31}{15}B^4A(1,1,1,1,1,1) \tag{4.51}$$

となる。第6段の係数は

$$A(1,2,2,2,2,2)=x(4,1)BA(1,1,2,2,2,2),$$
$$A(2,1,2,2,2,2)=x(4,2)BA(1,1,2,2,2,2),$$
$$A(1,2,2,2,2,2)=x(4,3)BA(1,2,1,2,2,2),$$
$$A(2,2,1,2,2,2)=x(4,4)BA(1,2,1,2,2,2),$$
$$A(2,1,2,2,2,2)=x(4,5)BA(2,1,1,2,2,2),$$
$$A(2,2,1,2,2,2)=x(4,6)BA(2,1,1,2,2,2),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A(2,2,2,1,2,2)=x(4,715)BA(2,2,2,1,1,2),$$

$$A(2,2,2,2,1,2)=x(4,716)BA(2,2,2,1,1,2),$$
$$A(2,2,2,1,2,2)=x(4,717)BA(2,2,2,1,2,1),$$
$$A(2,2,2,2,2,1)=x(4,718)BA(2,2,2,1,2,1),$$
$$A(2,2,2,2,1,2)=x(4,719)BA(2,2,2,2,1,1),$$
$$A(2,2,2,2,2,1)=x(4,720)BA(2,2,2,2,1,1) \tag{4.52}$$

であり，ここで

$$x(4,2)=x(4,1)-1,$$
$$x(4,4)=x(4,3)-2,$$
$$x(4,6)=x(4,5)-1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x(4,716)=x(4,715)-1,$$
$$x(4,718)=x(4,717)-2,$$
$$x(4,720)=x(4,719)-1 \tag{4.53}$$

である。以上の結果を使って$x(4,2)\sim x(4,720)$を$x(4,1)$で表わし，(2.26) に対応する関係

$$\begin{aligned}&x(4,1)x(3,1)x(2,1)x(1,1)x(0,1)\\&+x(4,2)x(3,1)x(2,1)x(1,1)x(0,1)\\&+x(4,4)x(3,2)x(2,1)x(1,1)x(0,1)\\&+x(4,10)x(3,5)x(2,2)x(1,1)x(0,1)\\&+x(4,34)x(3,17)x(2,6)x(1,2)x(0,1)\\&+x(4,154)x(3,77)x(2,26)x(1,7)x(0,2)=0\end{aligned} \tag{4.54}$$

に代入し，計算すると

$$x(4,1)=\frac{5}{62},\quad x(4,2)=-\frac{57}{62},\ x(4,4)=-\frac{151}{73},$$
$$x(4,10)=-\frac{151}{52},x(4,34)=-\frac{57}{13},x(4,154)=-\frac{5}{2} \tag{4.55}$$

となる。以上の結果を使うと

$$A(1,2,2,2,2,2)=\frac{1}{6}B^5A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,1,2,2,2,2)=-\frac{19}{10}B^5A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,1,2,2,2)=\frac{151}{30}B^5A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,1,2,2)=-\frac{151}{30}B^5A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,2,1,2)=\frac{19}{10}B^5A(1,1,1,1,1,1),$$
$$A(2,2,2,2,2,1)=-\frac{1}{6}B^5A(1,1,1,1,1,1) \tag{4.56}$$

となる。以上の結果，第３章で導いた新しい方法で$N=5$，６の場合のすべての係数$A(k_1, k_2, \cdots, k_{N-1}, k_N)$を導くことができた。

第５章　結　　論

本論文では１次元トラップ２準位ボース系の基底状態の理論を粒子数$N=3$，４，５，６の場合に展開した。ボース系は斥力デルタ関数型相互作用する点粒子からなるとし，トラップポテンシャルは調和振動子型とした。

第２章では２準位ボース系の基底状態の波動関数として次の形を仮定した。

$$\begin{aligned}&\Psi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{N-1}, x_N)\\&=e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\alpha x_i)^2}\sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2}\sum_{k_3=1}^{2}\cdots\sum_{k_{N-1}=1}^{2}\sum_{k_N=1}^{2}\\&\times A(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{N-1}, k_N)\\&\times C_{k_1-1}C_{k_2-1}C_{k_3-1}\cdots C_{k_{N-1}-1}C_{k_N-1}\\&\times H_{k_1-1}(\alpha x_1)H_{k_2-1}(\alpha x_2)H_{k_3-1}(\alpha x_3)\\&\quad\cdots H_{k_{N-1}-1}(\alpha x_{N-1})H_{k_N-1}(\alpha x_N).\end{aligned} \tag{5.1}$$

粒子間相互作用が斥力デルタ関数型であることより，波動関数に対する境界条件 (2.11) (2.12) (2.13) (2.14) を使い，係数$A(k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{N-1}, k_N)$に対する関係式 (2.16) (2.17) (2.18) (2.19) を求めた。第Ⅲ論文[16]で示したように，係数は (2.25) (2.26) (2.27) および (2.28) (2.29) の関係を満している。以上の関係式を使って

$$A(\overbrace{1,\cdots\cdots,1}^{k-1},2,\overbrace{1,\cdots\cdots,1}^{N-k})$$

$$=\left(k-\frac{N+1}{2}\right)\frac{C_0C_0}{C_1C_0}\left(\frac{c}{2\alpha}\right)A\,(1,1,1,\cdots,1,1,1)$$

$$(k=1,2,\cdots,N-1,N) \tag{5.2}$$

となることを求めた。具体的に，$N=3$ の場合は(2.39)(2.40)(2.41)，$N=4$ の場合は(2.42)～(2.45)，$N=5$ の場合は(2.46)～(2.50)，$N=6$ の場合は(2.51)～(2.56)である。

第3章では粒子数$N=3$，4の場合の全係数$A\,(k_1,k_2,k_3,\cdots,k_{N-1},k_N)$を求めた。$N=3$ の場合は，(3.11)(3.12)(3.13)(3.17)(3.18)(3.19)であり，$N=4$ の場合は(3.32)～(3.35)，(3.53)～(3.58)，(3.64)～(3.67)である。全係数$A\,(k_1,k_2,k_3,\cdots,k_{N-1},k_N)$の関係を図1と図2のようにツリー構造で示し，係数導出のための新しい方法を導いた。粒子数Nの場合のツリー構造はN段からなり，第1段は$A\,(1,1,1,\cdots,1,1,1)$，第2段は第1段からN個の1のうち1個だけ1→2に変換したもの，第3段は第2段から($N-1$)個のうち1個だけ1→2に変換したものであり，この手順を繰り返し，第N段は1個の1と($N-1$)個の2からなる係数である。$N=3$ の場合，第1段と第2段，第2段と第3段の関係は(3.68)(3.72)であり，第2段内，第3段内の関係は(3.71)(3.75)である。$N=4$ の場合，第1段と第2段，第2段と第3段，第3段と第4段の関係は(3.76)，(3.80)，(3.85)であり，第2段内，第3段内，第4段内の関係は(3.78)，(3.83)，(3.88)である。同一段内の関係は，係数を右から左へ移行する場合の置換1↔2の回数に依存している。以上の関係と(2.25)(2.26)の関係を使うことによって，全係数を導出できることが分かった。

第4章では第3章で導いた方法を使って，$N=5$と$N=6$の全係数$A\,(k_1,k_2,k_3,\cdots,k_{N-1},k_N)$を求めた。$N=5$ の場合，第1段と第2段，第2段と第3段，第3段と第4段，第4段と第5段の関係は(4.1)(4.6)(4.15)(4.23)であり，第2段内，第3段内，第4段内，第5段内の関係は(4.2)(4.7)(4.16)(4.24)である。以上の関係と(4.3)(4.11)(4.19)(4.25)の関係を使って，係数を導くと(4.4)(4.5)(4.14)(4.22)(4.29)となった。$N=6$ の場合，第1段と第2段，第2段と第3段，第3段と第4段，第4段と第5段，第5段と第6段の関係は(4.30)(4.35)(4.41)(4.47)(4.52)であり，第2段内，第3段内，第4段内，第5段内，第6段内の関係は(4.31)(4.36)(4.42)(4.48)(4.53)である。以上の関係と(4.32)(4.37)(4.43)(4.49)(4.54)の関係を使って，係数を導くと(4.33)(4.34)(4.40)(4.46)(4.51)(4.56)となった。

2準位系の場合の確率振幅$C\,(n_1,n_2)$は係数$A\,(k_1,k_2,\cdots,k_{N-1},k_N)$と(2.21)～(2.24)の関係があるので，$N=3$ の場合，

$$\begin{aligned}
&|C\,(3,0)|^2=A\,(1,1,1)^2,\\
&|C\,(2,1)|^2=2B^2A\,(1,1,1)^2,\\
&|C\,(1,2)|^2=\frac{2}{3}B^4A\,(1,1,1)^2,\\
&|C\,(0,3)|^2=0,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$N=4$ の場合，

$$\begin{aligned}
&|C\,(4,0)|^2=A\,(1,1,1,1)^2,\\
&|C\,(3,1)|^2=5B^2A\,(1,1,1,1)^2,\\
&|C\,(2,2)|^2=\frac{57}{9}B^4A\,(1,1,1,1)^2,\\
&|C\,(1,3)|^2=\frac{65}{36}B^6A\,(1,1,1,1)^2,\\
&|C\,(0,4)|^2=0,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$N=5$ の場合，

$$\begin{aligned}
&|C\,(5,0)|^2=A\,(1,1,1,1,1)^2,\\
&|C\,(4,1)|^2=10B^2A\,(1,1,1,1,1)^2,\\
&|C\,(3,2)|^2=\frac{61}{2}B^4A\,(1,1,1,1,1)^2,
\end{aligned}$$

$$|C(2,3)|^2=\frac{63}{2}B^6A(1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(1,4)|^2=\frac{83}{10}B^8A(1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(0,5)|^2=0, \tag{5.5}$$

$N=6$ の場合,

$$|C(6,0)|^2=A(1,1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(5,1)|^2=\frac{35}{2}B^2A(1,1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(4,2)|^2=\frac{623}{6}B^4A(1,1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(3,3)|^2=\frac{957}{4}B^6A(1,1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(2,4)|^2=\frac{6923}{30}B^8A(1,1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(1,5)|^2=\frac{1043}{18}B^{10}A(1,1,1,1,1,1)^2,$$
$$|C(0,6)|^2=0 \tag{5.6}$$

となる。規格化条件

$$\sum|C(n_1,n_2)|^2=1 \tag{5.7}$$

を使うと,

$$A(1,1,1)^2=\frac{1}{1+2B^2+\frac{2}{3}B^4},$$
$$A(1,1,1,1)^2=\frac{1}{1+5B^2+\frac{57}{9}B^4+\frac{65}{36}B^6},$$
$$A(1,1,1,1,1)^2=\frac{1}{1+10B^2+\frac{61}{2}B^4+\frac{63}{2}B^6+\frac{83}{10}B^8},$$
$$A(1,1,1,1,1,1)^2=\frac{1}{1+\frac{35}{2}B^2+\frac{623}{6}B^4+\frac{957}{4}B^6+\frac{6923}{30}B^8+\frac{1043}{18}B^{10}} \tag{5.8}$$

となる。

今後の課題は１次元２準位トラップボース系において，一般の N 粒子の場合の基底状態の波動関数を求めることとLieb[17]とYang-Yang[18)19)]が均質１次元ボース系で行ったように，この系の励起状態および有限温度の熱平衡状態のふるまいを調べることである。中性原子気体の実験的研究は従来理論モデルとして考えていた系を実現しており，物質のシミュレータとしての役割を持っている。これらの実験的研究とともに，１次元トラップボース系の理論的研究はマクロ有限量子系の多様なふるまいに対して重要な知見を与えている。

参考文献

1）A. Görlitz, J. M. Volels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001)
2）F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001)
3）M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001)
4）L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publications, 2003)
5）B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch and I. Bloch, Nature (London) **429**, 277 (2004)
6）T. Kinoshita, T. Wenger and D. S. Weiss, Science **305**, 1125 (2004)
7）M. Girardeau, J. Math. Phys. **1**, 516 (1960)
8）L. Tonks, Phys. Rev. **50**, 955 (1936)
9）E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963)
10）N. Bogolubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947)
11）P. J. Forrester, N. E. Frankel, T. M. Garoni and N. S. Witte, Phys. Rev. **A67**, 043607 (2003)
12）J. G. Muga and R. F. Snider, Phys. Rev. **A57**, 3317 (1998)
13）K. Sakmann, A. I. Streltsov, O. E. Alon and L. S. Cederbaum, Phys. Rev. **A72**, 033613 (2005)
14）M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Ap-

plied Science, **46**, 1 (2005)

15) M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Applied Science, **47**, 17 (2006)

16) M. Ohya, the Bulletin of Nagasaki Institute of Applied Science, **48**, 55 (2007)

17) E. H. Lieb, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963)

18) C. N. Yang and C. P. Yang, J. Math. Phys. **10**, 1115 (1969)

19) C. P. Yang, Phys. Rev. **A2**, 154 (1970)